.Q. 53 m Brauhäuser

Theoretisch=praktisches

Lehrbuch

der

Arithmetik und Geometrie

für

Gewerbeschulen,

nach den über die letzteren erschienenen Allerhöchsten Bestimmungen bearbeitet

von

Joseph Bräuhäuser,

Lehrer der obern Klasse an der höhern Bürgerschule zu Augsburg.

Mit 5 Steintafeln.

Augsburg, 1833.

In der v. Jenisch und Stage'schen Buchhandlung.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Der Mangel eines Lehrbuches der Arithmetik und Geometrie, welches nach der Form des hier vorliegenden in möglichster Kürze und bei mäßigem Preise Alles umfaßte, was an den bisherigen höhern Bürgerschulen in diesem Gebiete gelehrt werden mußte, so wie das Zeit-, Schrift- und Textverderbende des Diktirens und Copirens, hat mich am Ende des verflossenen Schuljahres veranlaßt, ein Lehrbuch oben bezeichneter Art dem Drucke zu übergeben.

Da ich aber während des Druckes von der Allerhöchsten Orts definitiv beschlossenen Errichtung der Gewerbe-Schulen Kunde erhielt, so glaubte ich, den Druck bis zum Erscheinen des neuen Lehrplanes einstellen zu müssen. Mit großem Vergnügen habe ich nun aus demselben entnommen, daß mein Lehrbuch durch kleine Erweiterungen dem neuen Plane ganz angepaßt, und ohne Bedenken mit dem Titel eines Lehrbuches für Gewerbeschulen versehen werden könne.

Um dasselbe nicht allzu voluminös und kostspielig werden zu lassen, habe ich es nur mit den nöthigsten Beispielen versehen, auch in der Geometrie die Sätze, aus denen die angegebenen Zeichnungsmethoden bewiesen werden, mitunter blos bezeichnet, weil die Beweise selbst beim Schulunterrichte sehr leicht beigefügt werden können, überdieß auch den Schülern Gelegenheit gegeben ist, ihre Denkkraft zu versuchen.

Gegen die gewöhnliche Ordnung habe ich mehrere Zeichnungs- und Meßmethoden, wofür die Beweise erst aus den später folgenden Sätzen fließen, gleich im Eingange zur Geometrie angegeben, weil der Zeichnungsunterricht gleich beym Eintritte der Schüler in die Gewerbeschule, und nicht erst beim schulgerechten Vorkommen der Sätze, woraus die berührten Zeichnungsmethoden entspringen, begonnen werden muß, und weil ich überhaupt auf das Praktische nicht früh genug glaubte hinweisen zu können, indem ich dieses am geeignetsten fand, die Gemüther der Jugend für die Wissenschaft zu gewinnen.

Augsburg im Juni 1833.

Der Verfasser.

Einleitung.

§. 1.

Mathematik (von dem griechischen Worte Mathema, Wissenschaft) ist die Wissenschaft der Größen.

*) Unter Größe versteht man Alles, was aus mehreren gleichartigen Theilen bestehend gedacht werden kann. Da man sich jede Zahl aus mehreren kleineren Zahlen, jede Linie aus mehreren kleineren Linien, jede Fläche und jeden Körper aus mehreren kleineren Flächen oder Körpern bestehend denken kann, welche kleinere Zahlen, Linien, Flächen oder Körper mit den größern gleichartig sind, so sind alle Zahlen, Linien, Flächen und Körper als Größen zu betrachten. — Es heißt also Wissenschaft der Größen nichts anders als Wissenschaft der Zahlen, Linien, Flächen und Körper.

§. 2.

Jener Theil der Mathematik, welcher von den Zahlen handelt, heißt Arithmetik; jener, welcher von den Linien, Flächen und Körpern handelt, heißt Geometrie. Durch die Verbindung der Geometrie und der Arithmetik entsteht noch ein dritter Theil der Mathematik, nämlich die Trigonometrie, welche bei drei gegebenen Stücken eines Dreieckes, welche in Seiten und Winkeln bestehen, die drei andern durch Rechnung finden lehrt.

§. 3.

Die Mathematik ist entweder rein, wenn auf wirkliche Gegenstände keine Rücksicht genommen wird, oder angewandt, wenn die Lehren der reinen Mathematik auf wirkliche Gegenstände bezogen werden.

§. 4.

Zur angewandten Mathematik gehören:

a) die praktische Rechenkunst, die Anwendung der Arithmetik auf die gewöhnlichen Rechnungsfälle im bürgerlichen Leben;

b) die praktische Geometrie, die Anwendung der Geometrie und Trigonometrie zur Bestimmung der Längen, Höhen und Flächen auf der Erde (Landmeßkunst), und unter der Erde (Markscheidekunst.)

Uebrigens versteht man unter angewandter Mathematik ohne Beisatz:

a) die mechanischen Wissenschaften, vom Gleichgewichte und der Bewegung der Körper;

b) die optischen Wissenschaften, vom Lichte;

c) die astronomischen Wissenschaften, von den Körpern des Weltgebäudes und dem dadurch bestimmten Raum und Zeitmaße auf unserer Erde;

d) die architektonischen Wissenschaften, als Baukunst, Artillerie und Fortifikation.

§. 5.

Der Kürze halber hat man in der Mathematik folgende Zeichen:

1.) das Zeichen der Gleichheit (=); A=B heißt A ist eben so groß als B, oder A ist gleich B;

2.) das Zeichen der Ungleichheit (<) dessen Spitze immer der kleinern Größe zugewendet ist. A > B heißt A ist größer als B; A < B heißt A ist kleiner als B.

3.) das Zeichen der Aehnlichkeit (∽); A ∽ B heißt A ist B ähnlich;

4.) das Zeichen der Congruenz (≌); A ≌ B heißt A und B sind congruent, oder gleich und ähnlich (haben gleiche Größe und Gestalt);

5.) das Unendlichgroße wird durch (∞), und das Unendlichkleine durch ($\frac{1}{\infty}$) bezeichnet.

§. 6.

Obgleich der Mathematiker keinen Satz aufstellt, dem er nicht zugleich den Beweis von seiner Richtigkeit beifügte, so gibt es doch auch Sätze, die keines Beweises bedürfen, von deren Richtigkeit Jeder überzeugt ist, der einsieht, was durch sie ausgesprochen wird. Diese Sätze heißen Axiome. Sie sind folgende:

1) Jede Größe ist sich selber gleich.
2) Das Ganze ist gleich allen seinen Theilen zusammengenommen, und umgekehrt.
3) Das Ganze ist größer als Ein oder einige Theile desselben.
4) Zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.
5) Was größer als eine von zwei gleichen Größen ist, ist auch größer als die andere von ihnen.
6) Was kleiner als die eine von zwei gleichen Größen ist, ist auch kleiner als die andere von ihnen.
7) Was größer als die größere von zwei ungleichen Größen ist, ist auch größer als die kleinere von ihnen.
8) Was kleiner ist als die kleinere von zwei ungleichen Größen, ist auch kleiner als die größere von ihnen.
9) Gleiches auf gleiche Art verändert (Gleiches zu Gleichem addirt, Gleiches von Gleichem subtrahirt, Gleiches durch Gleiches multiplizirt oder dividirt), gibt wieder Gleiches; hingegen Gleiches auf ungleiche Art, oder Ungleiches auf gleiche Art verändert, gibt Ungleiches.
10) Congruente Dinge sind vollkommen einerlei, und lassen sich daher für einander setzen.
11) Gleiche Größen lassen sich für einander in Rücksicht auf ihre Gleichheit, so wie ähnliche in Rücksicht ihrer Aehnlichkeit für einander setzen.

Arithmetik.

Erstes Hauptstück.

Von den ganzen Zahlen und ihrer Bezeichnungs-Art.

§. 7.

Arithmetik (von dem griechischen Worte Arithmos, Zahl), ist die Wissenschaft mit Zahlen zu rechnen.

*Rechnen heißt aus bekannten Zahlen unbekannte finden, die sich auf erstere beziehen. Wenn ich finden soll, wie viel von 12 übrig bleibe, wenn man 7 davon wegnimmt, so heißt dieses Auffinden der Zahl 5 — Rechnen; 12 und 7 sind nämlich die bekannten Zahlen, aus denen die unbekannte 5 gefunden wurde.

§. 8.

Unter einer Zahl verstehen wir einen Ausdruck, welcher uns mit Bestimmtheit angibt, wie oft irgend ein Gegenstand vorhanden sey. Wenn man sagt 8 Gulden, 12 Kreuzer, so sind 8 und 12 Zahlen, und zwar ganze Zahlen, weil sie mit Bestimmtheit angeben, daß gewisse Gegenstände, der Gulden oder der Kreuzer nämlich, gerade 8 oder 12mal ganz vorhanden seyen.

*Von den Zahlen muß man die Zahlzeichen oder Ziffern unterscheiden, deren man zehn hat, nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Die letzte dieser Ziffern heißt Null (von dem lateinischen nullus, kein) und zeigt den Mangel einer Zahl an. Man hat also nur zehn Ziffern, aber eine unendliche Menge von Zahlen. Von diesen Zahlen werden neun mit Einer Ziffer, alle übrigen aber mit mehr als Einer Ziffer bezeichnet. 8764 ist eine einzige Zahl, wird aber mit vier Ziffern geschrieben; 8 ist die erste, 4 die letzte Ziffer dieser Zahl.

§. 9.

Wenn man immer 10 Einheiten zusammen nimmt, und aus ihrem Inbegriffe eine Einheit höherer Ordnung bildet, so heißt diese nach einer bestimmten Regel festgesetzte Unterordnung der Zahlen ein Zahlensystem, und zwar das Dezimalsystem. Nach diesem Systeme bilden zehn Einheiten einen Zehner, zehn Zehner einen Hunderter, zehn Hunderter einen Tausender, zehn Tausender einen Zehntausender, 10 Zehntausender einen Hunderttausender, 10 Hunderttausender eine Million. Nun nimmt man auf's Neue Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. von Millionen. Auf die nämliche Art entstehen Billionen, Trillionen, Quatrillionen, Quintillionen, Sextillionen, Septillionen u. s. f. — Zahlen, die im bürgerlichen Leben nicht vorkommen.

*Es sind zwar noch andere Zahlensysteme denkbar, indem man immer zwölf oder 2 Einheiten niederer Ordnung für eine Einheit höherer Ordnung könnte gelten lassen; allein sie wären zu unbequem, und bleiben folglich unbeachtet.

§. 10.

Ausser ihrem natürlichen Werthe haben die 9 Zahlzeichen oder Ziffern auch noch einen sogenannten Lokalwerth, welcher folglich verschieden ist, je nachdem die Ziffer an dieser oder jener Stelle steht. Eine Ziffer 8 nämlich, welche, von der rechten Hand hergezählt, die zweite Stelle einnimmt, bedeutet nicht blos acht Einheiten, (dieß wäre ihr natürlicher Werth), sondern 8 Zehner oder achtzig. So bedeutet 1 an dieser Stelle Einen Zehner oder zehn, 2 zwei Zehner oder zwanzig, 3 drei Zehner oder dreißig, 4 vier Zehner oder vierzig u. s. f. — An der dritten Stelle bedeutet die Ziffer 8 nicht blos acht Einheiten, sondern acht Hunderter, an der vierten acht Tausender, an der fünften 8 Zehntausender, an der sechsten acht Hunderttausender, an der siebenten acht Millionen u. s. w.

8 acht
80 achtzig
800 acht Hundert
8000 acht Tausend
80000 achtzig Tausend
800000 achthundert Tausend
8000000 acht Millionen.

Dasselbe gilt von jeder andern Ziffer.

§. 11.

Hat man eine größere Zahl auszusprechen, so theile man selbe von der Rechten zur Linken in Klassen von drei zu drei Ziffernstellen, die man durch Comma, welche abwechselnd zuerst unten, dann oben gemacht werden, von einander trennt. Bequemlichkeitshalber kann man wohl oben das erstemal nur Ein Comma, das zweitemal 2, das drittemal 3 u. s. w. setzen. Nun hat man weiter nichts zu wissen nöthig als immer drei Ziffern, die zusammen eine Klasse bilden, aussprechen zu können, jedes untenstehende Comma für Tausend, Ein obenstehendes für Million, zwei für Billion, drei für Trillion, vier für Quatrillion u. s. w. zu lesen.

71'''056,748''976,234'567,845

Ein und siebenzig Trillionen, sechs und fünfzig Tausend sieben Hundert acht und vierzig Billionen, neun Hundert sechs und siebenzig Tausend zwei Hundert vier und dreißig Millionen, fünf Hundert sieben und sechzig Tausend acht Hundert fünf und vierzig.

§. 12.

Soll eine Zahl, wie vier und sechzig Tausend fünf Hundert zwei Billionen, sechs und dreißig Tausend Millionen und 8 mit Ziffern angeschrieben werden, so berücksichtige man, daß die Klasse der Millionen, Billionen u. s. f. jede aus sechs Ziffern besteht, daß jede Klasse zwei Abtheilungen habe, so daß die drei höhern Ziffernstellen

die Tausender, die drei niedern die Einer dieser Klasse darstellen, und schreibe, da auf einmal immer nur drei Ziffer ausgesprochen werden, diese auf einmal an, und setze, wenn es Tausender sind, unten das Zeichen (,), wenn es aber Einer von Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. sind, oben die Zeichen (') oder ('') oder ('''). Die übrigen Stellen jeder Klasse endlich, von welchen in der ausgesprochenen Zahl nichts vorkommt, fülle man mit Nullen aus. So schreibt man die oben gegebene Zahl folgendermassen an:

64,502''036,000'000,008.

*Eine durch Ziffern ausgedrückte Zahl aussprechen, oder eine gegebene Zahl mit Ziffern bezeichnen heißt man Numeriren.

§. 13.

Die Zahlen sind entweder

benannte, bei denen der Gegenstand, den man sich so und so oft denken soll, angegeben ist, z. B. 8 Gulden. Hier ist der Gegenstand, der Gulden nämlich, den man sich als achtmal vorhanden denken soll, angegeben; oder

unbenannte, bei denen der Gegenstand, den man sich so und so oft vorhanden denken soll, nicht angegeben ist, z. B. 8. Hier ist nicht angegeben, welchen Gegenstand man sich achtmal vorhanden denken soll.

Die benannten Zahlen selbst sind entweder gleichartig oder ungleichartig. Gleichartig sind sie, wenn der Gegenstand, der so und so oft vorhanden gedacht werden soll, überall der nämliche ist, z. B. 5 Gulden, 6 Gulden, 8 Gulden u. s. w. Ist dieser Gegenstand überall ein anderer, so nennt man sie ungleichartig, z. B. 5 Gulden, 8 Pferde, 7 Häuser u. s. w.

Zweites Hauptstück.

Von den vier Rechnungsarten mit ganzen Zahlen.

§. 14.

Addiren heißt bei zwei oder mehreren gegebenen gleichartigen Zahlen eine neue finden, die den gegebenen zusammen genommen gleich ist. — Die Zahlen welche addirt werden sollen, nennt man Summanden oder Posten, die gefundene Zahl heißt Summa, Summe. Der Name Facit statt Summe, (das macht, das thut), ist veraltet. — Das Zeichen der Addition ist (+) und wird plus (mehr) gelesen.

§. 15.

Wenn mehrere Zahlen addirt werden sollen, so setze man sie so unter einander, daß Einheit unter Einheit, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter u. s. f. zu stehen kommen. Nun fange man bei den Einheiten zu addiren an, schreibe die gefundenen Einheiten unter die Einheiten der Posten, zähle aber die dabei erhaltenen Zehner zu denen der Posten, die so erhaltenen Zehner schreibe man ebenfalls unter die Zehner der Posten, und zähle endlich die dadurch erhaltenen Hunderter (Zehner der Zehner) zu denen der Posten u. s. f.

57846	
3259	
8024	Posten oder Summanden.
507	
9	
8002	
77647	Summa oder Summe.

§. 16.

Subtrahiren heißt bei zwei gegebenen gleichartigen Zahlen eine dritte suchen, welche den Unterschied der gegebenen Zahlen angiebt — suchen, wie viele Dinge übrig bleiben, wenn von einer bestimmten Zahl derselben eine andere bestimmte Zahl weggenommen wird. — Jene Zahl, von der man eine andere wegnehmen soll, heißt **Minuend**; jene, welche weggenommen werden soll, wird **Subtrahend** oder **Subtractor**, die gefundene Zahl wird **Rest**, **Differenz** oder **Unterschied** genannt. Das **Zeichen der Subtraktion** ist (—) und wird minus (weniger) gelesen.

*Rest (bleibt übrig) ist zu unterscheiden von Differenz oder Unterschied. Wenn man sagt: Wilhelm hat 8 Aepfel, und ißt davon 2, so ist 6 Aepfel der Rest, (das was ihm noch übrig bleibt). Wenn man aber sagt: Wilhelm hat 8 Aepfel und Carl hat 6 Aepfel, so ist 2 Aepfel die Differenz oder der Unterschied ihrer Aepfel, aber nicht der Rest derselben; dem Wilhelm bleiben ja deßwegen, weil Carl auch 6 hat, nicht blos 2 übrig, sondern er behält seine 8.

§. 17.

Wenn zwei Zahlen von einander subtrahirt werden sollen, so schreibe man den Subtrahend so unter den Minuend, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. f. zu stehen kommen. Hierauf subtrahire man die Einer des Subtrahend von jenen des Minuend, und entlehne, falls dieß nicht angehen sollte, einen Zehner, eben so verfahre man mit den Zehnern, und entlehne hiebei nöthigenfalls einen Hunderter (zehn Zehner) u. s. w. Z. B. 876459 — 8897.

876459	Minuend
8897	Subtrahend
867562	Differenz

§. 18.

Aus dem Begriffe der Subtraktion (§. 16.) geht hervor, daß im Minuend nicht blos der Subtrahend, sondern auch die Differenz enthalten sey; denn es bleibt ja die Differenz noch übrig, wenn man den Subtrahend vom Minuend wegnimmt. Es müssen also diese beiden zusammengenommen dem Minuend gleich seyn, oder:

Die Summe der Differenz und des Subtrahend ist gleich dem Minuend.

Auf solche Weise dient also die Addition der Subtraktion zur Probe.

578689	Minuend
123956	Subtrahend
454733	Differenz
578689	Summe der Differenz und des Subtrahend, welche gleich ist dem Minuend.

Uebrigens könnte die Probe auch durch die Subtraktion gemacht werden. Denn da der Minuend dem Subtrahend und der Differenz zusammen genommen gleich ist, so muß, wenn man die Differenz vom Minuend subtrahirt, der Subtrahend zum Vorschein kommen.

578689	Minuend
123956	Subtrahend
454733	Differenz
123956	Rest, wenn vom Minuend die Differenz subtrahirt wird.

Man sieht, daß auf diese Weise der Subtrahend erscheint.

§. 19.

Aus dem Begriffe der Addition (§. 14.) geht hervor, daß die Summe gleich sey allen Summanden zusammengenommen, daß also alle Summanden von der Summe müssen weggenommen werden können,

ohne daß ein Rest bleibt. Wenn man daher alle Summanden bis auf einen zusammengenommen (die Summa aller Summanden bis auf einen) von der Hauptsumme subtrahirt, so muß der weggelassene Posten als Rest erscheinen. Es kann also auf diese Art die Subtraktion der Addition zur Probe dienen.

3256	
4567	
2356	
4231	
3421	
17831	Hauptsumme
14575	Summe aller Summanden bis auf den obersten
3256	Rest, welcher dem weggelassenen Posten gleich ist.

§. 20.

Multipliziren heißt eine gegebene Größe so und so oft nehmen, als es eine andere gegebene Größe angibt.

Die beiden gegebenen Größen heißt man **Faktoren**, und zwar den einen den **Multiplikand**, den andern den **Multiplikator**. Multiplikand ist jene Größe, welche so und so oft genommen werden muß, als es die andere angibt; letztere also, welche dieß angibt, heißt Multiplikator. Der Multiplikator ist also immer eine unbenannte Zahl; er zeigt ja nur an, wie und wie oft der Multiplikand (der allerdings eine benannte Zahl seyn kann) zu nehmen sey. Die gefundene Größe heißt **Produkt**. Das **Zeichen der Multiplikation** ist ein liegendes Kreuz (X) oder auch ein (.).

*Die Multiplikation ist strenge genommen nichts anders als eine abgekürzte Addition; denn 8 mit 3 multipliziren heißt nichts anderes als 8 dreimal als Summanden setzen, oder $8 + 8 + 8 = 24$. Man sieht aber, daß sich die Mul-

tiplikation nur dann statt der Addition anwenden lasse, wenn alle Posten iu letzterer gleich sind.

§. 21.

Hat man eine mehrzifferige Zahl mit einer einzifferigen zu multipliziren, so multiplizire man mit letzterer zuerst die Einer der ersteren, hierauf die Zehner derselben, und addire die durch die Multiplikation der Einer erhaltenen Zehner gleich dazu. Eben so mache man es mit den Hundertern u. s. w.

$$\frac{5786475 \times 8}{46291800}$$

§. 22.

Hat man eine mehrzifferige Zahl wieder mit einer mehrzifferigen zu multipliziren, so multiplizire man erstere mit den Einern der letztern wie §. 21.; hierauf multiplizire man mit den Zehnern der letzteren, schreibe aber die niedrigste Stelle dieses Zehnerproduktes unter die Zehnerstelle des Einerprodukts, mache es eben so mit den Hundertern und Tausendern u. s. w., schreibe die niedrigsten Stellen ihrer Produkte unter die Hunderter und Tausenderstelle des Einerproduktes und addire am Ende alle diese einzelne Produkte. Nullen in der Mitte des Multiplikators bleiben unberücksichtigt; denn jede Größe mit 0 multiplizirt ist = 0.

$$\begin{array}{r} 5734 \times 5026 \\ \hline 34404 \\ 11468 \\ 28670 \\ \hline 28819084 \end{array}$$

§. 23.

Dividiren heißt suchen, wie und wie oft eine gegebene Größe in einer andern enthalten sey, oder von ihr weggenommen werden könne. Jene Größe, von der man wissen will, wie oft sie in einer andern enthalten sey, nennt man Divisor; jene, von der man wissen will, wie oft der Divisor von ihr weggenommen werden könne, heißt Dividend; die gefundene Größe wird Quotus oder Quotient genannt, und zeigt an, wie oft der Divisor im Dividend enthalten sey. — Das Zeichen der Division sind zwei übereinander stehende Punkte (:)

*Die Division ist eigentlich nur eine abgekürzte Subtraktion; wenigstens könnte man durch die Subtraktion zu demselben Resultate gelangen, was man schneller durch die Division erhält. Will ich z. B. wissen, wie oft 725 in 2175 enthalten sey, d. i. von 2175 weggenommen werden könne, so subtrahire ich 725 so oft von 2175 als es angeht, und so sehe ich auch, wie oft es darin enthalten ist.

$$\begin{array}{r} 2175 \\ -725 \\ \hline 1450 \\ -725 \\ \hline 725 \\ -725 \\ \hline 0 \end{array}$$

Man sieht hieraus, daß 725 dreimal von 2175 weggenommen werden könne, was man aber schneller durch die Division findet.

§. 24.

Hat man eine mehrzifferige Zahl mit einer einzifferigen zu dividiren, so dividire man mit letzterer in die höchste, oder wenn diese kleiner ist als der Divisor, in die nächst niedrigere Stelle des Dividend, addire den Rest (jede Einheit

als zehn) zur niedrigeren Stelle, dividire mit dem Divisor in diese u. s. w. und schreibe den aus den Einheiten des Dividend erhaltenen Quotienten an die Einerstelle des Totalquotienten, den aus den Zehnern des Dividend erhaltenen Quotienten an die Zehnerstelle des Totalquotienten u. s. f.

578460 : 4 = 144615.

4 ist also in den Hunderttausendern 1mal, in den 10tausendern 4mal, in den Tausendern 4mal, in den Hundertern 6mal, in den Zehnern 1mal und in den Einheiten 5mal, im Ganzen also 144615mal enthalten.

§. 25.

Soll eine mehrzifferige Zahl mit einer mehrzifferigen dividirt werden, so dividire man mit der höchsten Stelle der letzteren in die höchste (oder wenn diese kleiner ist als die erste Stelle des Divisors, in die nächst niedrigere) Stelle des Dividend, multiplizire mit dem erhaltenen Quotienten (der im Totalquotienten jene Stelle erhalten muß, aus welcher Stelle des Dividend er gezogen ist, und an welche die letzte Ziffern des Divisors reicht), den ganzen Divisor, und setze die niedrigste Ziffer des so erhaltenen Produkts um so viele Ziffer zurück von der höchsten (oder wenn man in die erste Stelle nicht dividiren konnte, von der zweiten) Stelle des Dividend an gerechnet unter den Dividend, als der Divisor Zifferstellen hat. Nun subtrahire man dieses Produkt von dem darüber stehenden Theil des Dividend, setze dann zum Reste den noch übrigen Theil des Dividend herab, und verfahre weiter wie vorher.

```
11475 : 459 = 25
 918
-----
 2295
 2295
-----
    0
```

459 ist also in den 1147 Zehnern 2mal, und in den 2295 Einern 5mal, also überhaupt im Dividend 20mal und 5mal enthalten.

§. 26.

Aus dem Begriffe der Multiplikation (§. 20.) geht hervor, daß ein Faktor so oft im Produkte enthalten seyn müsse, als der andere Faktor Einheiten hat. Es muß folglich, wenn man mit dem einen Faktor in das Produkt dividirt, der andere zum Vorschein kommen. Auf diese Art kann also die Division der Multiplikation zur Probe dienen.

$$287 \times 5 = 1435$$
$$1435 : 5 = 287$$

*Wenn man also das Produkt kennt und Einen Faktor, so ist der andere sehr leicht zu finden, man darf nur mit dem bekannten in das Produkt dividiren.

§. 27.

Aus dem Begriffe der Division (§. 23.) geht hervor, daß der Divisor so oft im Dividend enthalten sey, als der Quotient Einheiten hat, daß also der Dividend gleich sey dem Divisor so oft genommen, als der Quotient Einheiten hat, oder daß der Dividend gleich sey dem Produkte des Divisors und des Quotienten. Auf diese Art kann die Multiplikation der Division zur Probe dienen.

$$1435 : 5 = 287$$
$$5 \times 287 = 1435$$

Drittes Hauptstück.

Von den gebrochenen Zahlen oder Brüchen.

§. 28.

Unter einem **Bruche** versteht man einen oder mehrere Theile eines gleichgetheilten Ganzen. Ist ein Bruch mit einer ganzen Zahl verbunden, so heißen beide zusammen eine **gemischte Zahl**.

*Zur Bezeichnung eines Bruches sind zwei Zahlen nothwendig, wovon man die eine den Nenner, die andere den Zähler heißt. Der **Nenner** zeigt an, in wie viel gleiche Theile das Ganze getheilt sey; der Zähler gibt die Anzahl der vorhandenen Theile an.

§. 29.

Gemeine Brüche können was immer für eine ganze Zahl zum Nenner haben. Man schreibt diesen immer unter einen horizontalen Strich, den man Bruchzeichen heißt, und setzt den Zähler oberhalb dieses Bruchzeichens.

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \frac{6}{7}.$$

Die Zahlen 1, 4, 7, 6 sind die Zähler; 2, 5, 8, 7 sind die Nenner dieser gemeinen Brüche.

§. 30.

Bei gleichen Nennern ist der Werth eines Bruches um so größer, je größer sein Zähler ist.

$$\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$$

Denn beide Brüche haben den Nenner 8. Durch beide werden also solche Theile bezeichnet, deren 8 ein Ganzes machen, folglich gleich große Theile. Offenbar sind aber 5 solche Theile mehr als 3.

Bei gleichen Zählern ist der Werth eines Bruches um so größer, je kleiner sein Nenner ist.

$$\frac{3}{8} < \frac{3}{5}$$

Denn durch den ersten Bruch werden solche Theile bezeichnet deren 8 ein Ganzes machen, durch den zweiten solche, deren 5 ein Ganzes machen. Letztere müssen also offenbar größer seyn. Es müssen also auch drei der letztern zusammengenommen größer seyn als drei der erstern.

§. 31.

Brüche sind ächt oder eigentlich, wenn der Zähler kleiner ist als der Nenner; dagegen sind sie unächt oder uneigentlich, wenn der Zähler größer oder eben so groß ist als der Nenner.

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ sind ächte oder eigentliche Brüche.

$\frac{5}{4}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{5}$ sind unächte oder uneigentliche Brüche.

§. 32.

Jeder unächte Bruch kann in eine ganze oder gemischte Zahl verwandelt werden, wenn man mit dem Nenner in den Zähler dividirt, den Quotienten als die Ganzen betrachtet, den allenfallsigen Rest als Zähler anschreibt, und ihm den vorigen Nenner gibt.

$$\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}; \ \frac{12}{4} = 3$$

Denn $\frac{8}{5}$ bezeichnet uns 8 Theile, deren 5 ein Ganzes machen. Wir werden also so oft ein Ganzes haben, als 5 in 8 enthalten ist, d. i einmal und 3 Theile deren 5 ein Ganzes machen oder $\frac{3}{5}$ bleiben uns noch übrig. Eben so ist es mit $\frac{12}{4}$. Man kann also den Zähler eines jeden Bruches als ein Dividend, und seinen Nenner als einen Divisor betrachten. Umgekehrt läßt sich jede Division als Bruch anschreiben, wenn man nämlich den Dividend als Zähler und den Divisor als Nenner betrachtet.

Eben so kann jede ganze Zahl in einen uneigentlichen Bruch verwandelt werden, wenn man ihr den Nenner 1 gibt.

$$7 = \frac{7}{1}$$

So kann auch jede gemischte Zahl in einen unächten Bruch verwandelt werden, wenn man die Ganzen mit dem Nenner multiplizirt, und den Zähler dazu addirt, die so gefundene Zahl als Zähler betrachtet, und den Nenner unverändert darunter setzt.

$$5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}.$$

§. 33.

Brüche sind gleichartig, wenn sie Theile von einem und demselben Ganzen sind.

$\frac{3}{5}$ fl. und $\frac{7}{8}$ fl. sind gleichartige Brüche, weil sie Theile von einem und demselben Ganzen, nämlich vom Gulden sind.

Brüche sind ungleichartig, wenn sie Theile von verschiedenen Ganzen sind.

$\frac{5}{8}$ fl. und $\frac{1}{2}$ kr. sind ungleichartige Brüche.

§. 34.

Brüche sind gleichnamig, wenn sie gleiche Nenner haben.

$\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{8}$ sind gleichnamige Brüche.

Brüche sind ungleichnamig, wenn sie verschiedene Nenner haben.

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$ sind ungleichnamige Brüche.

§. 35.

Mit dem Ausdrucke eines jeden Bruches lassen sich zweierlei Veränderungen vornehmen, ohne daß der Werth des Bruches nur im Geringsten verändert wird; man kann den Ausdruck des Bruches vergrößern und verkleinern. Vergrößert wird der Ausdruck des Bruches auf diese Art, wenn man Zähler und Nenner mit ein und derselben Zahl multiplizirt. $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$. Man hat hier den Zähler und den Nenner des Bruches $\frac{1}{2}$ mit 4 multiplizirt. Man hat nun zwar viermal so viele Theile als zuvor, dagegen ist aber auch jeder Theil viermal kleiner geworden. Ueberhaupt ist sehr leicht zu begreifen, daß Jemand, der ein Ganzes in zwei Hälften getheilt hat, jede dieser Hälften in 4 gleiche Theile zertheilen muß, wenn

er aus dem Ganzen 8 Theile bekommen will, und daß also 4 solcher Theile dem Halben gleich seyen.

Verkleinert wird der Ausdruck eines Bruches auf diese Art, wenn man Zähler und Nenner mit ein und derselben Zahl dividirt.

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

§. 36.

Wenn ungleichnamige Brüche gleichnamig gemacht werden sollen, so setze man zuerst ihre Nenner herab. Nun streiche man alle kleinere Nenner, welche schon ohne Rest in einem größern enthalten sind, durch. Vor den noch übrigen ziehe man eine senkrechte Linie, und suche eine Zahl, mit der man zwei oder mehrere der noch vorhandenen Nenner ohne Rest dividiren kann. Diese Zahl setze man vor die senkrechte Linie, durchstreiche die Nenner, welche damit ohne Rest dividirt werden können, und setze die erhaltenen Quotienten unter sie. Dieß wiederholt man so lange, als man noch eine Zahl findet, mit der man wenigstens zwei der hinter der Linie stehenden Zahlen ohne Rest dividiren kann. Endlich multiplizirt man alle nicht ausgestrichene Zahlen vor und hinter der Linie mit einander, und erhält so den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner. *) Nun dividire man mit dem Nenner eines jeden Bruches in den gemeinschaftlichen Nenner, und multiplizire den Quotienten mit dem Zähler des Bruches, so erhält man für jeden Bruch den neuen Zähler, und wird finden, daß man überall blos Zähler und Nenner mit ein und derselben Zahl multiplizirt, also blos den Ausdruck und nicht den Werth des Bruches verändert habe.

*) Darunter versteht man die kleinste Zahl, in welcher alle Nenner ohne Rest enthalten sind. Die so gefundene Zahl ist nämlich ein Produkt aus den Faktoren aller Nenner, also auch aus allen Nennern selbst, und zugleich das kleinste, weil die Faktoren der kleineren Nenner, welche zugleich Faktoren der größern waren, weggelassen wurden. Wenn man daher mit einem dieser Faktoren (einem Nenner) in das genannte Produkt dividirt, so muß nach §. 26. der andere, oder das Produkt der andern zum Vorscheine kommen, d. i. eine ganze Zahl, weil ia die Faktoren lauter ganze Zahlen waren.

$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{3}{10}, \frac{5}{9}$

$$\begin{array}{r|l} & 4, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 9 \\ 3 & 2, 4, 5, 3 \\ 2 & 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 360 \end{array}$$

$$\frac{270, 180, 240, 216, 300, 315, 108, 200}{360}$$

§. 37.

Gleichnamige Brüche werden addirt, wenn man ihre Zähler addirt, und den Nenner unverändert läßt.

$\frac{5}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} = \frac{18}{8} = 2\frac{2}{8} = 2\frac{1}{4}$ (§. 32. 35.)

§. 38.

Wenn ungleichnamige Brüche addirt werden sollen, so mache man sie zuerst gleichnamig (§. 36.) und verfahre dann wie §. 37.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 4\frac{5}{72}.$$

$$\begin{array}{r|l} & 3, 9, 6, 8, 2, 4 \\ 3 & 3, 2, \\ & 3 \cdot 3 \cdot 8 = 72 \end{array}$$

$$\frac{48 + 32 + 60 + 63 + 36 + 54}{72} = \frac{293}{72} = 4\frac{5}{72}$$

§. 39.

Wenn gemischte Zahlen addirt werden sollen, so addire man zuerst die Brüche, und zähle die allenfalls erhaltenen Ganzen zu den schon vorhandenen.

$$5\frac{1}{2} + 7\frac{2}{3} + 8\frac{3}{4} + 6\frac{5}{8} = 28\frac{13}{24}$$

$$2, 3, 4, 8$$

$$3 \cdot 8 = 24$$

$$\frac{12 + 16 + 18 + 15}{24} = \frac{61}{24} = 2\frac{13}{24}$$

§. 40.

Wenn gleichnamige Brüche subtrahirt werden sollen, so subtrahire man den Zähler des Subtrahend von jenem des Minuend, und lasse den Nenner unverändert.

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

§. 41.

Wenn ungleichnamige Brüche subtrahirt werden sollen, so mache man sie zuerst gleichnamig (§. 36.), und verfahre dann wie §. 40.

$$\frac{7}{8} - \frac{5}{6} = \frac{1}{24}$$

$$2 \,|\, 8,\ 6$$
$$\ \ \ \,|\, 4,\ 3$$

$$2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$$

$$\frac{21 - 20}{24} = \frac{1}{24}$$

§. 42.

Wenn gemischte Zahlen subtrahirt werden sollen, so subtrahire man zuerst die Brüche, dann die Ganzen. Sollte der Bruch des Minuend kleiner seyn als der des Subtrahend, so zerlege man ein Ganzes vom Minuend in einen mit dem Bruche desselben gleichnamigen Bruch, addire diesen zu den schon vorhandenen, und subtrahire nun.

$$24\tfrac{3}{8} - 18\tfrac{1}{5} = 6\tfrac{7}{40}$$
$$\tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{5}$$
$$\frac{15 - 8}{40} = \frac{7}{40}$$

$$13\tfrac{2}{3} - 6\tfrac{5}{6} = 6\tfrac{5}{6}$$
$$\tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{6}$$
$$3,\ 6$$
$$(10)$$
$$\frac{4 - 5}{6} = \frac{5}{6}$$

§. 43.

Hat man einen Bruch mit einem andern Bruche zu multipliziren, so multiplizire man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Kann man zuerst einen der Zähler und einen der Nenner mit ein und derselben Zahl dividiren, so thue man dieses.

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

$$\frac{\not{5}^{1}}{\not{8}_{2}} \times \frac{\not{4}^{1}}{\not{5}_{1}} = \frac{1}{2}$$

Hätte man im zweiten Beispiele nicht verkleinert, so hätte man $\frac{20}{40}$ erhalten, was nun doch auch, mit 5 und 4 verkleinert, $\frac{1}{2}$ gäbe.

*Man sieht hieraus, wie unrecht diejenigen daran sind, die den Ausdruck multipliziren mit dem deutschthümler'schen vermehren übersetzen. $\frac{5}{8}$ ist gewiß mehr als $\frac{1}{2}$; denn schon $\frac{4}{8}$ ist ein Halbes. Nun ist $\frac{5}{8}$ mit $\frac{4}{5}$ multiplizirt worden, und das Produkt ist nur $\frac{1}{2}$. Hat man also $\frac{5}{8}$ vermehrt? $\frac{5}{8}$ mit $\frac{4}{5}$ multipliziren heißt man soll $\frac{5}{8}$ gerade $\frac{4}{5}$mal nehmen, oder man soll den 5ten Theil von $\frac{5}{8}$ gerade 4mal nehmen. Der 5te Theil von $\frac{5}{8}$ aber ist $\frac{1}{8}$, und dieses 4mal genommen ist $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

§. 44.

Ist einer von den Faktoren (oder auch beide) eine gemischte Zahl, so verwandle man diese in einen unächten Bruch (§. 32.), und verfahre wie §. 43.

$$7\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{23}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{23}{6} = 3\frac{5}{6}$$

$$7\frac{2}{3} \times 3\frac{4}{5} = \frac{23}{3} \times \frac{19}{5} = \frac{437}{15} = 29\frac{2}{15}$$

§. 45.

Ist einer von den Faktoren eine ganze Zahl, so dividire man mit dieser, wenn es angeht, blos den Nenner des andern Faktors.

$$\frac{7}{8} \times 4 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

Denn $\frac{7}{8} \times 4 = \frac{7}{\overset{8}{2}} \times \frac{\overset{1}{4}}{1} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

Geht aber dieses nicht an, so multiplizire man mit der ganzen Zahl den Zähler des andern Faktors.

$$\frac{7}{8} \times 5 = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$$

Denn $\frac{7}{8} \times 5 = \frac{7}{8} \times \frac{5}{1} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$

§. 46.

Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden, so multiplizire man den Nenner des Bruches mit der ganzen Zahl, und lasse den Zähler unverändert.

$$\frac{3}{4} : 8 = \frac{3}{32}$$

Denn $\frac{3}{4}$: 8 heißt nichts anders, als man soll $\frac{3}{4}$ in 8 gleiche Theile zertheilen. Wenn man aber jedes Viertel eines Ganzen in 8 gleiche Theile zertheilt, so hat man das Ganze offenbar in 32 gleiche Theile zerlegt, folglich ist jeder der auf diese Art erhaltenen Theile ein Zweiunddreißigstel, und man erhält also als den achten Theil eines jeden Viertels $\frac{1}{32}$, mithin als den achten Theil von $\frac{3}{4}$ auch 3mal $\frac{1}{32}$ oder $\frac{3}{32}$.

Kann aber der Zähler des Bruches durch die ganze Zahl dividirt werden, so thne man dieses, und lasse den Nenner unverändert.

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}$$

denn $\frac{8}{9} : 4 = \frac{\overset{2}{8}}{\underset{9}{36}} = \frac{2}{9}$

Ueberhaupt aber braucht es nicht weiter bewiesen zu werden, daß der vierte Theil von 8 Stücken, wovon hier jedes zufällig ein Neuntel heißt, gerade 2 Stücke seyen.

§. 47.

Soll ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden, so verwandle man die Division in eine Multiplikation, indem man den Nenner des Divisors zu seinem Zähler macht, und umgekehrt seinen Zähler zum Nenner.

$$\frac{5}{8} : \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{16}$$

Denn will ich wissen, wie oft 2 in $\frac{5}{8}$ enthalten ist, so dividire ich eben $\frac{5}{8}$ durch 2. Nach §. 46. erhalte ich da

$$\frac{5}{8 \times 2} = \frac{5}{16}$$

Sind aber 2 Ganze $\frac{5}{16}$mal enthalten, so muß ja der dritte Theil von 2 Ganzen 3mal so oft darin enthalten seyn, mithin 3mal $\frac{5}{16}$mal, oder $\frac{5}{16} \times 3 = \frac{15}{16}$mal.

§. 48.

Ist der Divisor oder der Dividend eine gemischte oder letzterer auch nur eine ganze Zahl, so verwandle man diese zuerst in einen uneigentlichen Bruch, und verfahre nach §. 47.

$$7\tfrac{2}{3} : 3\tfrac{1}{2} = \tfrac{23}{3} : \tfrac{7}{2} = \tfrac{23}{3} \times \tfrac{2}{7} = \tfrac{46}{21} = 2\tfrac{4}{21}$$

$$8 : \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{1} : \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{1} \times \tfrac{3}{2} = \tfrac{24}{2} = 12$$

*Manchen mag es befremden, daß 8 durch $\frac{2}{3}$ dividirt 12 Ganze gibt. Allein man bedenke nur, daß 8 : $\frac{2}{3}$ so viel ist, als: wie oft kann man $\frac{2}{3}$ von 8 Ganzen wegnehmen? Nun aber wird man offenbar $\frac{1}{3}$ von einem Ganzen 3mal wegnehmen können, folglich von 8 Ganzen 24mal. Daß man aber $\frac{2}{3}$ nur halb so oft als $\frac{1}{3}$ davon wegnehmen könne, also 12mal, bedarf keines weitern Beweises.

Viertes Hauptstück.

Die vier Rechnungsarten mit benannten Zahlen, nebst Angabe einiger Vortheile.

§. 49.

Hat man benannte Zahlen zu addiren, so schreibe man die gleichartigen Posten wie bei der Addition unbenannter Zahlen unter einander, und setze immer die höhere Sorte vor die zunächst niedrigere. Dann beginne man die Addition bei der niedrigsten Sorte, und zähle die allenfalls erzeugten Einheiten der höhern Sorte zu diesen hinüber.

4257 fl.	36 kr.	2 pf.	1 hl.
834 „	12 „	3 „	1 „
57 „	48 „	2 „	1 „
59 „	3 „	1 „	— „
4316 „	45 „	3 „	1 „
9525 fl.	27 kr.	1 pf.	— hl.

§. 50.

Hat man benannte Zahlen zu subtrahiren, so schreibe man sie eben so unter einander, wie bei der Addition (§. 49.) Nun fange man auch bei der niedrigsten Sorte zu subtrahiren an. Sollte irgend ein Minuend kleiner seyn als sein Subtrahend, so entlehne man eine Einheit höherer Sorte, zerlege sie in die Einheiten der niedrigeren, und addire diese zu den schon vorhandenen, worauf nun die Subtraktion Statt finden kann.

(84)

3786 fl.	24 kr.	3 pf.	1 hl.
578 „	36 „	2 „	— „
3207 fl.	48 kr.	1 pf.	1 hl.

§. 51.

Sollen benannte Zahlen mit einer unbenannten multiplizirt werden (der Multiplikator ist immer eine unbenannte Zahl) so multiplizire man zuerst die kleinste Sorte, dann die zunächst höhere, und addire zu dem Produkte dieser auch die Einheiten eben dieser Sorte, welche durch die Multiplikation der zunächst niedrigeren erhalten wurden u. s. w.

(327 fl. 36 kr. 2 pf. 1 hl.) X 8
2620 fl. 53 kr. — pf. — hl.

§. 52.

Kommen am Ende eines oder auch beider Faktoren Nullen vor, so multiplizirt man, ohne auf die Nullen zu achten, und hängt dann dem Produkte so viele Nullen an, als die beiden Faktoren mit einander haben.

48700 X 60	Denn 48700
487	60
6	00000
2922000	292200
	2922000

Hat man also mit 10, 100, 1000 u. s. f. zu multipliziren, so braucht man dem Multiplikand blos eine, zwei, drei u. s. w. Nullen anzuhängen, weil jede Größe, mit 1 multiplizirt, unverändert bleibt.

§. 53.

Ist einer der Faktoren ein Produkt, so multiplizire man mit den Faktoren dieses Produktes.

87643 X 48
701144
4206864

Es ist sehr einleuchtend, daß man eine Größe 48mal genommen habe, wenn man ihr Achtfaches 6mal genommen hat.

§. 54.

Soll man mit der Zahl 11 multiplizirung, so schreibe man als Einheiten in das Produkt die Einheiten des Multiplikand, als Zehner die Summe der Einheiten und Zehner des Multiplikand, als Hunderter die Summe der Zehner und Hunderter des Multiplikand, als Tausender die Hunderter des Multiplikand (wenn nämlich letzterer keine Tausender mehr hat; ausserdessen fahre man fort wie früher). Daß man, wenn bei den Zehnern, Hundertern u. s. w. eine Einheit höherer Ordnung entsteht, diese hinüberzählen müsse, versteht sich von selbst.

8456 × 11 93016	denn 8456 11 8456 8456 93016

§. 55.

Hat man benannte Zahlen zu dividiren, so beginne man mit der Division der höchsten Sorte, mache den Rest zu Einheiten der nächst niedrigeren, addire die schon vorhandenen dazu, dividire diese, und setze dasselbe Verfahren bis zur niedrigsten Sorte fort.

(876 fl. 24 kr. 3 pf.) : 8 = 109 fl. 33 kr. $\frac{3}{8}$ pf.

76
4
60
264 kr.
24

§. 56.

Ist der Divisor ein Produkt, so dividire man, falls die Division mit einem Faktor aufgeht, zuerst mit diesem, dann mit dem andern. Geht sie mit dem

ersten Faktor nicht auf, so ist wenig mit diesem Verfahren gewonnen. Um dieses schnell zu wissen, beachte man Folgendes:

1.) Die Zahlen 2, 4, 6, 8 und jede, deren letzte Ziffer eine von den genannten Zahlen oder eine Nulle ist, lassen sich durch 2 ohne Rest dividiren, und heißen darum gerade Zahlen.

2.) Eine Zahl ist ohne Rest durch 3 theilbar, wenn die Summe der durch die einzelnen Ziffern bezeichneten Zahlen durch 3 ohne Rest theilbar ist.

5783 ist durch 3 nicht ohne Rest theilbar; denn $5 + 7 + 8 + 3 = 23$

dagegen ist 1347 durch 3 theilbar, weil $1 + 3 + 4 + 7 = 15$ ist.

3.) Eine Zahl ist durch 4 ohne Rest theilbar, wenn die durch die beiden letzten Ziffern bezeichnete Zahl durch 4 ohne Rest theilbar ist.

87641 ist durch 4 nicht ohne Rest theilbar, weil es 41 nicht ist.

Dagegen ist es 8764, weil es 64 ist.

4.) Eine Zahl ist ohne Rest durch 5 theilbar, wenn die letzte Ziffer derselben 5 oder 0 ist.

5.) Eine Zahl ist ohne Rest durch 6 theilbar, wenn sie es durch 3 ist, und wenn überdieß ihre letzte Ziffer eine gerade Zahl bezeichnet.

87468 : 36

21867

$2429\frac{6}{9} = 2429\frac{2}{3}$

Es ist sehr einleuchtend, daß man 36 Theile aus einem Ganzen mache, wenn man dieses zuerst in vier Theile, und dann das Viertel wieder in 9 Theile zertheilt.

§. 57.

Eine Zahl wird mit 10, 100, 1000 u. s. w. dividirt, wenn man ihr eine, zwei, drei u. s. w. Zifferstellen abschneidet.

$87642 : 100 = 876\frac{42}{100} = 876\frac{21}{50}$

Denn $87642 : 100 = 876\frac{42}{100}$

```
 800
 ---
 764
 700
 ---
  642
  600
  ---
   42
```

§. 58.

Wenn der Divisor am Ende Nullen hat, so braucht man vom Dividend nur so viele Zifferstellen abzuschneiden als der Divisor Nullen hat, und mit der Zahl, welche durch die vor den Nullen stehenden Ziffern bezeichnet wird, zu dividiren.

$876|4 : 60 = 146\frac{4}{60} = 146\frac{1}{15}$
$89|23 : 600 = 14\frac{523}{600}$

Man hat nämlich die Divisoren 60 und 600 blos in ihre Faktoren 6 X 10 und 6 X 100 aufgelöst, und zuerst mit 10 oder 100 dividirt, dann mit 6.

§. 59.

Soll man mit einer Zahl multiplizıren, welche nur um Weniges kleiner oder größer ist, als eine andere, womit sich bequemer multipliziren läßt, so multiplizire man mit dieser, und addire das zu Wenige, oder subtrahire das zu Viele.

$8763\frac{1}{2} \times 14\frac{3}{4}$
$43817\frac{1}{2}$
$131452\frac{1}{2}$
$2190\frac{7}{8}$ hier blieb $3\frac{1}{2}$. Dieß zu einem uneigentlichen Bruch gemacht gibt $\frac{7}{2}$, und dieß durch 4 dividirt, gibt $\frac{7}{8}$.
$129261\frac{5}{8}$

Statt den Multiplikand $14\frac{3}{4}$mal zu nehmen, haben wir ihn 15mal (oder 5 und dann 3mal) genommen.

Da hatten wir ihn aber um $\frac{1}{4}$mal zu oft genommen; darum zogen wir das Viertel desselben wieder vom Produkte ab.

$$\begin{array}{r} 387\frac{3}{4} \times 88\frac{1}{2} \\ \hline 3102 \\ \hline 34122 \\ 193\frac{7}{8} \\ \hline 34315\frac{7}{8} \end{array}$$

Man hat nämlich den Multiplikand zuerst 88mal (oder 8 und dann 11mal, zuerst 8mal, weil da der Bruch wegfiel) genommen. Nun aber hatte man ihn um $\frac{1}{2}$mal zu wenig; folglich mußte noch seine Hälfte zum Produkte addirt werden.

§. 60.

Soll man mit einer Zahl multipliziren, welche selbst Faktor einer Zahl ist, womit sich leicht multipliziren läßt, z. B. Faktor von 10 oder 100, so multiplizire man mit letzterer, und dividire das Produkt durch den zweiten Faktor. Hier merke man sich, daß $33\frac{1}{3}$ der dritte Theil von 100, 25 der 4te, $16\frac{2}{3}$ der 6te, $14\frac{2}{7}$ der 7te, $12\frac{1}{2}$ der 8te, $11\frac{1}{9}$ der 9te Theil von 100 sey; daß ferner $3\frac{1}{3}$ der 3te, $2\frac{1}{2}$ der 4te, $1\frac{2}{3}$ der 6te, $1\frac{3}{7}$ der 7te, $1\frac{1}{4}$ der 8te, $1\frac{1}{9}$ der 9te Theil von 10 sey.

$$4328 \times 25 = (432800 : 4) = 108200$$
$$7365 \times 12\tfrac{1}{2} = (736500 : 8) = 92062\tfrac{4}{8} = 92062\tfrac{1}{2}$$

Das Fünfundzwanzigfache ist nämlich der 4te Theil des Hundertfachen, so wie das Zwölfundeinhalbfache der 8te Theil des Hundertfachen.

§. 61.

Soll man mit einer Zahl dividiren, welche ein Faktor von 10 oder 100 ist, so multiplizire man den Dividend mit dem zweiten Faktor, (der nämlich mit dem Divisor multiplizirt 10 oder 100 gibt) und dividire dann durch 10 oder 100.

$8764 : 33\frac{1}{3} = (8764 \times 3) : 100 = 262|92$
$= 262\frac{92}{100} = 262\frac{23}{25}$

Denn $8764 : 33\frac{1}{3} = \frac{8764 \times 3}{33\frac{1}{3} \times 3} = \frac{26292}{100}$ (§. 32. u. 35.)

$49 : 2\frac{1}{2} = (49 \times 4) : 10 = 19|6$
$= 19\frac{6}{10} = 19\frac{3}{5}$

Denn $49 : 2\frac{1}{2} = \frac{49 \times 4}{2\frac{1}{2} \times 4} = \frac{196}{10} = 19\frac{6}{10} = 19\frac{3}{5}$

Fünftes Hauptstück.

Anwendung der vier Rechnungsarten auf verschiedene Fälle des bürgerlichen Lebens.

A. Altersberechnungen.

§. 62.

Aufgabe. August war Anno 1792 den 5. Okt. Morgens 8 Uhr geboren, und erreichte ein Alter von 25 Jahren, 7 Monaten, 13 Stunden, 15 Minuten. Wann ist er gestorben?

Auflösung. Hier soll also berechnet werden, wann August gestorben ist, oder, wie viel Zeit damals verflossen war, als er starb. Als er starb war offenbar mehr Zeit verflossen als damals, da er geboren wurde, und zwar um seine Lebenszeit. Wenn man also zu der Zeit, die damals verflossen war, als er geboren wurde, seine Lebenszeit addirt, so findet man die Zeit, die damals verflossen war als er starb.

Nun sind aber Morgens 8 Uhr von einem Tage 8 Stunden verflossen; denn der Tag beginnt Mitternachts 12 Uhr. Am 5ten Morgens 8 Uhr irgend eines Monats sind von demselben Monate erst 4 Tage vollkommen verflossen, denn der 5te ist noch im Laufe und endet erst Mitternachts 12 Uhr. Am 5. Oktober eines Jahres sind von demselben Jahre erst 9 Monate vollkommen verflossen, denn der 10te ist noch im Laufe, und endet erst nach Verlauf seines 31ten Tages (Mitternachts 12 Uhr.) Ferner sind im Oktober des Jahres 1792 von Christi Geburt an erst 1791 Jahre verflossen; denn das 1792 ist erst im Laufe, und endet erst nach dem 31ten Dezember (Mitternachts 12 Uhr).

1791 J.	9 M.	4 T.	8 St.	— M.
25 „	7 „	— „	13 „	15 „
1817 J.	4 M.	4 T.	21 St.	15 M.

Als 4 Monate über das Jahr 1817 verflossen waren, schrieb man Anno 1818; als 4 Tage über 4 Monate verflossen waren, war schon der 5te Monat im Laufe, also der Mai; als 21 Stunden über 4 Tage verflossen waren, war der 5te Tag des Monats im Laufe; als 21 Stunden des Tages verflossen waren, mußten schon die 12 Vormittagsstunden und überdieß 9 Nachmittagsstunden vorüber seyn, es war also 9 Uhr Abends und 15 Minuten darüber, oder $\frac{1}{4}$ über 9 Uhr.

August starb also Anno 1818 den 5ten Mai Abends $\frac{1}{4}$ über 9 Uhr ($9\frac{1}{4}$ Uhr.)

*Nur der Deutlichkeit halber sagten wir oben „Mitternachts 12 Uhr." 12 Uhr ist eigentlich überflüssig.

§. 63.

Aufgabe. Carl war Anno 1736 den 5ten Juli Abends $8\frac{3}{4}$ Uhr geboren, und starb Anno 1787 den 12ten Oktober Morgens $6\frac{1}{2}$ Uhr. Wie alt ist er geworden?

Auflösung. Man soll berechnen, wie alt Carl geworden ist, d. i. die Zeit, welche verflossen ist von seiner Geburt bis zu seinem Tode. Diese Zeit aber

findet man, wenn man die Zeit, die damals verflossen war, als er geboren wurde, von der Zeit, die damals verflossen war, als er starb, subtrahirt. Als er starb waren verflossen (§. 62.) 1786 J. 9 M. 11 T. 6 St. 30 M. Als er geboren wurde waren verflossen 1735 J. 6 M. 4 T. 20 St. (nämlich die 12 Vormittagsstunden und 8 Nachmittagsstunden) 45 M.

1786 J.	9 M.	11 T.	6 St.	30 M.
1735 „	6 „	4 „	20 „	45 „
51 J.	3 M.	6 T.	9 St.	45 M.

Carl ist also 51 Jahre, 3 Monate, 6 Tage, 9 Stunden und 45 Minuten alt geworden.

§. 64.

Aufgabe. Philipp starb Anno 1792 den 12ten März Abends $6\frac{3}{4}$ Uhr in einem Alter von 63 Jahren, 8 Monaten, 9 Tagen, 7 Stunden, 30 Minuten. Wann war er geboren?

Auflösung. Es soll hier berechnet werden, wann Philipp geboren wurde, oder wie viel Zeit damals verflossen war, als er geboren wurde. Da er geboren wurde, war offenbar weniger Zeit verflossen, als damals, da er starb, und zwar um seine Lebenszeit. Wenn wir also sein Alter von der Zeit, die damals verflossen war, als er starb, subtrahiren, so finden wir die Zeit, die damals verflossen war, als er geboren wurde. Als er starb waren (nach §. 62.) 1791 J. 2 M. 11 T. 18 St. 45 M verflossen.

(14)

1791 J.	2 M.	11 T.	18 St.	45 M.
63 „	8 „	9 „	7 „	30 „
1727 J.	6 M.	2 T.	11 St.	15 M.

Als er geboren wurde, waren also 1727 J. 6 M. 2 T. 11 St. 15 M. verflossen, man schrieb also (§. 62.) Anno 1728 den 3. Juli $11\frac{1}{4}$ Uhr Vormittags.

B. Von der Regel detri.

§. 65.

Unter Regel detri versteht man jene Rechnungsart, wodurch bei drei gegebenen Gliedern ein viertes unbekanntes, das sich auf diese bezieht, gesucht wird.

Von einem der gegebenen Glieder will man wissen, was es kostet, wiegt, verzehrt u. s. w. Dieses Glied nennt man das Frageglied; die beiden andern gegebenen Glieder nennt man Bedingungs-Glieder. Von diesen Bedingungsgliedern ist immer eines mit dem Fragegliede gleichartig, oder kann es doch wenigstens werden, auch ist von diesem bekannt, was man von dem Fragegliede sucht. Das andere ist es mit dem vierten unbekannten Gliede. Da kann man nun das Frageglied mit dem ihm gleichartigen Bedingungsgliede als die Ursachen, das unbekannte Glied mit dem ihm gleichartigen Bedingungsgliede als die Wirkungen betrachten. Wenn nun mit dem Zunehmen der Ursachen auch das Zunehmen der Wirkungen verbunden ist, so heißt die Regel detri eine gerade (directa); ist aber mit dem Zunehmen der Ursachen ein Abnehmen der Wirkungen verbunden, so heißt die Regel detri ungerade (inversa).

Bei einer geraden Regel detri setze man das Frageglied an die dritte Stelle, das mit dem Fragegliede gleichartige Bedingungsglied an die erste, das andere an die zweite Stelle. Bei einer ungeraden Regel detri aber setze man das mit dem Fragegliede gleichartige Bedingungsglied an die dritte, und das Frageglied an die erste Stelle.

Nun sehe man bei einer jeden Regel detri ob das erste und letzte Glied gleichartig seyen. Ist dieß nicht der Fall, so mache man sie gleichartig. Endlich dividire man eines der beiden letzten Glieder durch das erste, und multiplizire dann die beiden letzten miteinander, so erhält man das unbekannte Glied, welches immer mit dem mittleren Gliede gleichnamig ist. Man kann auch die beiden letzten Glieder zuerst multipliziren, und erst dann durch das erste dividiren, wie man eben schneller zum Zwecke kommt.

§. 66.

Aufgabe. Was kosten 27½ Ctr., wenn 3 Loth 14 kr. 2 pf. kosten?

Auflösung. Von 27½ Ctr. will man wissen, was sie kosten; 27½ Ctr. ist also das Fragegliед. Gleichartig oder doch gleichartig zu machen ist das Bedingungsglied 3 Loth, auch weiß man von diesem, was man vom Fragegliede erst suchen will, nämlich den Preis. Das andere Bedingungsglied ist 14 kr. 2 pf., welches mit dem Preise der 27½ Ctr. gleichartig ist. Nun denke man sich die gleichartigen Glieder 27½ Ctr. und 3 Loth als Ursachen, (sie sind ja die Ursachen, warum man Geld bezahlt), die 14 kr. 2 pf. und das vierte unbekannte Glied (den Preis der 27½ Ctr.) denke man sich als die Wirkungen, so wird man finden, daß mit dem Zunehmen der Ursachen ein Zunehmen der Wirkungen verbunden sey. Je mehr Zentner man nämlich kauft, desto mehr (nicht desto weniger) Kreuzer oder Gulden muß man dafür bezahlen. Die Regel detri ist also eine gerade. Folglich:

```
3 L. (14 kr. 2 pf.)  2750 ℔.
     58 pf.          22000
                    ------
                     88000
                        58
                    ------
                       704
                      440
     -----------------------------------------------
     3| 5104000 | 1701333⅓ | 42533 | 3 |
             4|            |   6   | 0 | 7088
                  -------- |  ---- |   | fl.
                   1⅓ pf.  | 53 kr.|   |
```

Wenn also 3 L. 14 kr. 2 pf. kosten, so kosten 27½ Ctr. 7088 fl. 53 kr. 1⅓ pf.

Man hat hier weiter nichts gethan, als das zweite Glied durch das erste dividirt, und so berechnet, was 1 Loth kostet. Dann hat man die Anzahl der im dritten Gliede gegebenen Lothe mit dem Preise eines Lothes multiplizirt, und so den Preis aller Lothe gefunden; denn es ist einerlei ob man das zweite Glied durch das erste dividirt, und den Quotienten mit dem

letzten Gliede multiplizirt, oder ob man das zweite Glied zuerst mit dem dritten Gliede multiplizirt, und das Produkt durch das erste Glied dividirt.

Schneller kommt man auf folgende Art durch die sogenannte **welsche Praktik** zum Ziele.

3 C. 14 kr. 2 pf. 2750 ℔.

22000

Wenn 1 C. 1 fl. kostet, so kosten 88000 ℓ. auch 88000 fl.

Zu 12 kr. oder $\frac{1}{5}$ fl. kosten sie	17600
Zu 2 kr. oder $\frac{1}{6}$ fl. von $\frac{1}{5}$ fl.	$2933\frac{1}{3}$
Zu 2 pf. oder $\frac{1}{4}$ von 2 kr.	$733\frac{1}{3}$
Also zu 12 kr. 2 kr. u. 2 pf. od. $14\frac{1}{2}$ kr.	$21266\frac{2}{3}$
Nun durchs erste Glied dividirt	$7088\frac{8}{9}$

$\frac{8}{9}$ fl. $=$ 1 fl. $-$ $\frac{1}{9}$ fl. $=$ 60 kr. $-$ $6\frac{2}{3}$ kr. $=$ $53\frac{1}{3}$ kr.

§. 67.

Aufgabe. Was kosten 7 Ballen 4 Riß 8 Buch Papier, wenn 5 Bogen 3 kr. 2 pf. kosten?

Aufl. 5 Bog. 3 kr. 2 pf. 7 Ball. 4 Riß. 5 Buch

14 pf. 74 R.

1485 Bch.

8910

35640 Bg. *)

7128 = 1728 X 10

28512 = 1728 X 4

99792 = 1728 10mal+4mal genommen.

6|2494|8| 415 fl. 48 kr.

0|

*Nun kann man gleich mit dem ersten Gliede in das dritte dividiren. Ueberhaupt kann man dieß, wenn man es vortheilhaft findet. Auch kann man das erste Glied und eines der beiden andern mit einer andern beliebigen Zahl dividiren.

**Hat man eine gemischte Zahl, wie $24\frac{1}{2}$ mit 5 zu multiplizieren, so sagt man: $\frac{5}{2}$ sind 2 Ganze und $\frac{1}{2}$; 5mal 4 ist 20, und 2 ist 22, schreib 2; 5mal 2 ist 10 und 2 ist 12. Also ist das Produkt $122\frac{1}{2}$. Soll man mit 5 dividiren, so sagt man: 5 in 24 geht 4mal, bleibt $4\frac{1}{2}$, d. i. $\frac{9}{2}$, diese dividirt durch 5 macht $\frac{9}{10}$; also das Ganze $4\frac{9}{10}$.

§. 68.

Aufgabe. Was kosten 18 Schäffel 5 Metzen, wenn 4 Metzen 7 fl. 25 kr. kosten?

Auflösung.

4 M. 7 fl. 25 kr. 18 Sch. 5 M.

	113 M.
Zu 7 fl.	791
Zu 20 kr. $\frac{1}{3}$ fl.	$37\frac{2}{3}$
Zu 5 kr. oder $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{3}$ fl.	$9\frac{5}{12}$
Zusammen	$838\frac{1}{12}$
Dividirt durch das erste Glied	$209\frac{25}{48}$

Nun $\frac{25}{48}$ fl. zu Kreuzer gemacht:

$$\frac{25 \times \overset{5}{\cancel{60}}}{\underset{4}{\cancel{48}}} = \frac{125}{4} = 31\tfrac{1}{4} \text{ kr.}$$

§. 69.

Aufgabe. Was kosten 24 Ctr. 38 ℔., wenn 12 Loth 2 fl. 45 kr. kosten?

Auflösung.

$\overset{}{\cancel{12}}_{3}$ L. 2 fl. 45 kr. 2438 ℔.

	19504 L.	hier wurde das erste Glied und der Multiplikator 32 durch 4 dividirt.
Zu 3 fl.	58512	
Zu 15 kr. oder $\frac{1}{4}$ fl.	4876	
Zu 3 fl. weniger 15 kr.	53636	
Durch das erste Glied dividirt	$17878\frac{2}{3}$ fl.	

§. 70.

Aufgabe. Was kosten $34\frac{1}{2}$ Elle, wenn $5\frac{3}{4}$ Ellen $3\frac{2}{3}$ fl. kosten?

$5\frac{3}{4}$ Ellen. $3\frac{2}{3}$ fl. $34\frac{1}{2}$ Ellen.

Man verwandle alle gemischte Zahlen in unächte Brüche.

$\frac{23}{4}$ $\frac{11}{3}$ $\frac{69}{2}$

Kann man den Nenner des ersten Gliedes und einen Nenner der beiden andern Glieder durch ein und dieselbe Zahl dividiren, so thue man dieses. Denn da das Produkt des zweiten und dritten Gliedes später durch das erste Glied dividirt wird, so kann man das erste Glied als einen Divisor, Nenner eines Bruches, und die beiden folgenden Glieder als ein Dividend, Zähler desselben Bruches, (siehe §. 32.) betrachten. Man darf also das erste Glied und eines der beiden folgenden mit einer und derselben Zahl multipliziren (s. §. 35.) Dieß geschieht aber, wenn man entweder den Nenner des ersten und den Nenner des zweiten oder dritten Gliedes mit ein und derselben Zahl dividirt, oder wenn man bei einem der beiden folgenden Glieder den Nenner ganz wegläßt, und damit den Zähler des ersten Gliedes multiplizirt, oder auch wenn man den Nenner des ersten Gliedes ganz wegläßt, und damit den Zähler eines der folgenden Glieder multiplizirt.

$\frac{23}{2}$ $\frac{11}{3}$ 69

Um also den Nenner des ersten Gliedes ganz wegzuschaffen, multiplizire man damit den Zähler des zweiten Gliedes. Eben so multiplizire man mit dem Nenner des zweiten Gliedes das erste Glied, so ist auch dieser weggeschafft. Nun kann man das erste Glied und eines der beiden folgenden durch eine und dieselbe Zahl dividiren. (Aus demselben Grunde, aus dem man das erste und eines der folgenden Glieder mit einer und derselben Zahl multipliziren darf, darf man sie auch dividiren. (S. §. 35.)

$\frac{69}{1}$ 22 $\frac{69}{1}$

Also 22 fl.

Wenn übrigens ein Bruch weniger genirt, so kann man ihn auch beibehalten, und nur die andern wegschaffen.

$5\frac{3}{4}$ Ellen. $3\frac{2}{3}$ fl. $34\frac{1}{2}$

$$\frac{23}{4_2} \quad 3\tfrac{2}{3} \quad \frac{69}{2}$$

23 $3\frac{2}{3}$ 138

138 mit 4 multiplizirt 552

138 nun $\frac{1}{3}$mal genommen 46

Nun 4mal weniger $\frac{1}{3}$mal 506 | 22

Nun durchs erste Glied dividirt 23

46

0

§. 71.

Aufgabe. 8 Männer vollenden eine Arbeit in 4 Tagen. Wie lange werden 6 Männer dazu brauchen?

Auflösung. Von 6 Männern will man wissen, wie lange sie zur Arbeit brauchen, 6 Männer ist also das Frageglied. Das mit dem Fragegliede gleichartige Bedingungsglied sind 8 Männer. Betrachtet man diese, oder vielmehr die Zahl derselben als die Ursache, daß die Arbeit in mehr oder weniger Tagen vollendet werde, so kann man nicht sagen, daß mit dem Zunehmen der Ursachen ein Zunehmen der Wirkungen (der Tage, die sie zur Arbeit brauchen) verbunden sey. Im Gegentheile, je mehr Männer es sind, desto weniger Tage werden sie brauchen. Die Regel detri ist also ungerade.

6 M. 4 T. 8 M.
3 2

$16 : 3 = 5\frac{1}{3}$

§. 72.

Aufgabe. Von einem $1\frac{1}{2}$ Elle breiten Tuche brauchte Jemand $10\frac{1}{4}$ Elle zu einem Mantel. Wie viele Ellen würde er gebraucht haben, wenn das Tuch $1\frac{3}{4}$ Ellen breit gewesen wäre?

$$1\frac{3}{4} \quad 10\frac{1}{4} \quad 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{4} \quad \frac{41}{4} \quad \frac{3}{2}$$

$$14 \quad 41 \quad 3$$

$$14 \,|\, 123 \,|\, 8\tfrac{11}{14}$$

$$11$$

§. 73.

Es gibt Beispiele, (Regula de quinque, septem, novem) in welchen anscheinend mehr als 3 Glieder vorkommen; sie lassen sich aber alle auf drei, oder, das vierte unbekannte Glied mitgerechnet, (von dem auch einzelne Faktoren gegeben seyn können) auf vier zurückführen. So ist Länge und Breite des Tuches, eines Ackers u. dgl. als Ein Glied zu betrachten. Man multiplizirt eben die Länge mit der Breite, und erhält dadurch, wie die Geometrie lehrt, den Quadratinhalt. So ist Länge, Breite und Dicke (Tiefe) einer Mauer, eines Grabens u. s. w. als Ein Glied zu betrachten. Man multiplizirt sie eben mit einander, und erhält dadurch den körperlichen Inhalt. So ist das Kapital und die Zeit als Ein Glied zu betrachten; man multiplizirt sie eben mit einander, weil ein Kapital in 2 Jahren eben so viel trägt, als ein noch einmal so großes in nur Einem Jahre. So ist die Zahl der Arbeiter, und die Tage, welche sie arbeiten, als Ein Glied zu betrachten; man multiplizirt sie eben mit einander, weil eine Anzahl von Arbeitern in 2 Tagen noch einmal so viel leistet, als die doppelte Zahl der Arbeiter in Einem Tage. Eben so ist es mit den Stunden, die sie des Tages arbeiten. Man multiplizirt eben das Produkt der Arbeiterzahl und der Zahl der Tage mit der Stundenzahl, die sie täglich arbeiten. Sind bei dergleichen Aufgaben einige oder auch nur ein Faktor des vierten (unbekannten) Gliedes gegeben, so setzt man diese als viertes Glied an, und multiplizirt sie mit dem ersten Gliede.

§. 74.

Aufgabe. Auf einer Mühle mit 8 Gängen kann man in 4 Tagen $40\frac{3}{4}$ Schäffel mahlen. Wie viele wird man auf einer Mühle mit 10 Gängen in 8 Tagen mahlen können?

(8 G. × 4)	$40\frac{3}{4}$	(10 G. × 8)
32	$\frac{163}{4}$	80
~~128~~	163	~~80~~
~~16~~		~~10~~
8		5

8| 815| $101\frac{7}{8}$

§. 75.

6 Arbeiter, welche täglich 9 Stunden arbeiten, werfen in 4 Tagen einen 200 Fuß langen, 2 Fuß tiefen, und 3 Fuß breiten Graben auf. Wie viele Arbeiter sind nöthig, wenn in 8 Tagen ein 600 Fuß langer, 20 Fuß breiter und 10 Fuß tiefer Graben aufgeworfen werden soll, und wenn man täglich nur 5 Stunden arbeiten kann?

(200 × 2 × 3)	(6 × 4 × 9)	(600 × 20 × 10)	(8 × 5)
1200	(6 × 4 × 9)	(600 × 20 × 10)	40
~~48000~~	(~~6~~ × ~~4~~ × 9)	(~~600~~ × ~~20~~ × 10).	
~~8~~			
~~2~~			

540 Arbeiter.

Aufgaben dieser Art rechnet man übrigens viel bequemer durch den sogenannten Kettensatz.

C. Vom Kettensatze.

§. 76.

Der sogenannte Kettensatz gewährt eine bedeutende Erleichterung in den Auflösungen der Regel detri, und besteht darin, daß man das Frageglied nebst allen Zahlen, mit welchen es nach den bei der Regel

detri gegebenen Vorschriften multiplizirt werden muß, auf die rechte, das mit dem Fragegliede gleichartige Bedingungsglied aber, ebenfalls mit allen Zahlen, womit es zu multipliziren ist, auf die linke Seite setzt. Das Frageglied mit den dazu gehörigen Faktoren wird nun als Zähler, das mit ihm gleichartige Bedingungsglied mit den dazu gehörigen Faktoren aber als Nenner eines Bruches betrachtet, die beide so lange es angeht, durch eine und dieselbe Zahl dividirt und multiplizirt (dieß geschieht wie in §. 70. durch Versetzung der Nenner auf die andere Seite) werden können. Am Ende bringt man diesen Bruch auf den kürzesten Ausdruck, und zieht, wenn er unächt ist, die Ganzen aus.

Beim Ansatze beachte man folgendes: Die unbekannte Größe setze man zur Linken, ihr gegenüber das Frageglied, unter die unbekannte Größe das mit dem Fragegliede gleichartige Bedingungsglied, und rechts das andere mit dem unbekannten Gliede gleichartige Bedingungsglied.

§. 77.

Aufgabe. Was kosten $14\frac{3}{4}$ Klafter, wenn $2\frac{1}{4}$ Klafter $18\frac{3}{4}$ fl. kosten?

Auflösung.

fl. x.	~~14~~ $\frac{3}{4}$ K.
K. $2\frac{1}{4}$	~~18~~ $\frac{3}{4}$ fl.
~~9~~	~~4~~
4	59
~~4~~	~~75~~
3	25
12 :	1475 | $122\frac{11}{12}$ fl.

*Man verwandelt jede gemischte Zahl in einen Bruch, und entledigt sich der Brüche dadurch, daß man ihre Nenner auf die andere Seite setzt.

§. 78.

Ist das Frageglied mit dem darauf bezüglichen Bedingungsgliede oder das unbekannte Glied mit dem darauf bezüglichen Bedingungsgliede nicht gleichartig, so ergänzt man wie im folgenden Beispiele.

Wie viele Gulden (x. fl.) kosten		24 Ballen
Wenn 1 Ballen	=	10 Rieß
Wenn 1 Riß	=	20 Buch
Wenn 1 Buch	=	24 Bogen
Wenn 5 Bogen		3 kr. kosten,
und wenn kr. 60	=	1 fl.

Also

x.	24
1	~~10~~
1	~~20~~
1	~~24~~
~~5~~	3
~~60~~	1
	2
	4
	1152 fl.

§. 79.

6 Arbeiter, welche täglich 9 Stunden arbeiten, werfen in 4 Tagen einen 200 Fuß langen, 2 Fuß tiefen, und 3 Fuß breiten Graben auf. Wie viele Arbeiter sind nöthig, wenn in 8 Tagen ein 600 Fuß langer, 20 Fuß breiter und 10 Fuß tiefer Graben aufgeworfen werden soll, und wenn man täglich nur 5 Stunden arbeiten kann. (Siehe §. 75.)

A. x.	600 l.
T. 8	20 br.
St. 5	10 t.
l. 200	6 A.
t. 2	4 T.
br. 3	9 St.
2	4
	3
	2
	540

§. 80.

Aufgabe. Wie viele Ellen eines $1\frac{3}{4}$ Ellen breiten Tuches braucht man zu einem Kleide, wozu $7\frac{3}{4}$ Ellen eines 2 Ellen breiten Tuches nöthig sind?

Auflösung.

Wie viele Ellen (x. Ellen) eines $1\frac{3}{4}$ Ellen breiten } statt { $7\frac{3}{4}$ Ellen eines 2 Ellen breiten

Man sieht den bequemen Ansatz, indem hier nicht, wie bei der ungeraden Regel detri ein Versetzen der Glieder nöthig ist, sondern blos Länge und Breite als Ein Glied zusammengeschrieben wird.

x.	$7\frac{3}{4}$
$1\frac{3}{4}$	2
7	4
4	31

$$7 : 62 = 8\tfrac{6}{7}$$

§. 81.

Aufgabe. 12 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 8 Tagen. Wie lange brauchen 9 Arbeiter.

Wie viele Arbeiter (x. Arbeiter) vollenden in 9 Tagen } was { 12 Arbeiter in 8 Tagen

Also

$$\begin{Bmatrix} x. & 12 \\ 9 & 8 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{matrix} 3 & 4 \\ \hline 3 & : 32 = 10\tfrac{2}{3} \end{matrix}$$

D. Interessenrechnungen.

§. 82.

Wenn Jemand einem Andern eine Summe Geldes mit der Bedingung gibt, daß ihm diese zu einer bestimmten Zeit zurückbezahlt werden müsse, und daß ihm für jedes Hundert der vorgeschossenen Summe jährlich so und so viel bezahlt werde, so nennt man ersteren den Gläubiger, Creditor, letzteren den Schuldner, Debitor; das vorgeschossene Geld heißt Kapital; das jährlich dafür bezahlte Geld wird Interesse oder Leihegeld genannt; vom Gläubiger sagt man, er habe sein Kapital ausgeliehen oder angelegt, vom Schuldner, er habe es aufgenommen.

Ist der Gläubiger mit seinem Schuldner dahin übereins gekommen, daß ihm dieser für jedes Hundert jährlich 3, 4, 5 fl. Leihegeld bezahle (mehr zu fordern ist nach bayerischen Gesetzen unerlaubt), so sagt man, er habe sein Geld zu 3, 4, 5 Prozent angelegt. Ist der Schuldner mit seinem Gläubiger übereins gekommen, das aufgenommene Geld nach 2, 3 oder 4 Jahren zurückzubezahlen, so sagt man, er habe es auf 2, 3 oder 4 Jahre aufgenommen.

§. 83.

Die für ein gewisses Kapital in einer bestimmten Zeit treffenden Interessen kann man durch den Kettensatz berechnen. Z. B. was tragen 700 fl. zu 3 Prozent in 4 Jahren?

Interessen fl. x. tragen	700 fl. Kapital in 4 Jahren
Wenn 100 fl. Kapital in 1 Jahr	3 fl. Interesse tragen.

Also

x.	700
100	4
1	3
	84 fl.

Schneller rechnet man nach folgender Regel:

Man multiplizire das Kapital mit den Procenten dann mit den Jahren, und schneide die beiden letzten Ziffern ab, die links des Abschnitts fallenden Ziffern geben den Interessenbetrag, und die rechts werden in die zunächst kleineren Geldsorten auf die gewöhnliche Weise aufgelöst, dann schneidet man wieder 2 Ziffer ab u. s. w.

Gesetzt man hätte zu berechnen, was 700 fl. zu 4 Prozent in 3 Jahren tragen. Da jedes Hundert in Einem Jahre 4 fl. Interessen trägt, so wird es in 3 Jahren dreimal 4 oder 12 fl. tragen. So oft also 100 fl. im Kapital enthalten sind, erhält man 3 X 4 fl. Interessen. Man hätte demnach das Kapital mit 100 zu dividiren, um zu erfahren, wie oft dieses darin enthalten ist, und den Quotienten mit 3 und 4 zu multipliziren, was mit der oben gegebenen bequemeren Regel ganz einerlei ist.

§. 84.

Aufgabe. Was tragen 725 fl. zu $4\frac{1}{2}$ Prozent in 4 Jahren?

$$\begin{array}{l} 725 \\ \hline 2900 = 725 \times 4 \\ 362\frac{1}{2} = 725 \times \frac{1}{2} \\ \hline 3262\frac{1}{2} = 725 \times 4 \text{ und } \frac{1}{2} \\ 130|50 \\ \overline{30|00} \end{array}$$

Also 130 fl. 30 kr.

§. 85.

Aufgabe. Was tragen 850 fl. zu $4\frac{3}{4}$ Prozent in $5\frac{1}{2}$ Jahr?

850

$4250 = 850 \times 5$

$212\frac{1}{2} = 850 \times \frac{1}{4}$

$4037\frac{1}{2} = 850$ fünf weniger $\frac{1}{4}$mal genommen

$20187\frac{1}{2} = 4037\frac{1}{2} \times 5$

$2018\frac{3}{4} = 4037\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$222|06\frac{1}{4} = 4037\frac{1}{2} \times 5$ und $\frac{1}{2}$

3|75

3|00

Also 222 fl. 3 kr. 3 pf.

§. 86.

Aufgabe. Was tragen 940 fl. zu $4\frac{1}{3}$ Prozent in 5 Jahren und 7 Monaten?

940

$3760 = 940 \times 4$

$313\frac{1}{3} = 940 \times \frac{1}{3}$

$4073\frac{1}{3} = 940 \times 4$ und $\frac{1}{3}$

$20366\frac{2}{3} = 4073\frac{1}{3} \times 5 =$ den Zinsen von 5 Jahren

$2036\frac{2}{3} = 4073\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$ den Zinsen von $\frac{1}{2}$ Jahre

$339\frac{4}{9} = 2036\frac{2}{3} : 6 =$ den Zinsen eines Monats

$227|42\frac{7}{9} =$ den Zinsen von 5 Jahren und 7 Monaten.

$25|66\frac{2}{3}|$ Der Bruch $\frac{2}{3}$ kann füglich weggelassen werden.

5|28

Also 227 fl. 25 kr. 5 hl.

§. 87.

Aufgabe. Was tragen 426 fl. zu $4\frac{1}{2}$ Prozent in 10 Monaten?

426

$1704 = 426 \times 4$

$213 = 426 \times \frac{1}{2}$

$1917 = 426 \times 4$ und $\frac{1}{2}$ oder $4\frac{1}{2}$

$319\frac{1}{2}$

$15|97\frac{1}{2}$ Mit 1 multiplizirt bliebe nämlich 1917 unverändert. Subtrahirt man davon den

$58|50$ sechsten Theil, so bleiben noch $\frac{5}{6}$ übrig

$2|00$ (10 Monate ist nämlich $\frac{5}{6}$ Jahr, womit es multiplizirt werden muß.

Also 15 fl. 58 kr. 2 pf.

§. 88.

Um von einem Kapital, das zu 6 Prozent nur auf einige Tage ausgeliehen ist, die Interessen zu berechnen, hat man folgende Regel zu beobachten.

Man multiplizire das Kapital mit den Tagen, und schneide zwei Zifferstellen ab, so findet man die gesuchten Interessen in Kreuzern.

Denn bei Berechnung der Interessen wird der Monat zu 30 Tagen angenommen, also das Jahr zu 360 Tagen. Nun aber sind 6 fl. gerade 360 kr.; folglich heißt 100 fl. tragen in einem Jahre 6 fl. eben so viel, als 100 fl. tragen in 360 Tagen 360 kr., oder täglich 1 kr. Man erhält also von jedem Hundert so viele Kreuzer Interessen, als man es Tage ausgeliehen hat. Man müßte also mit 100 in das Kapital dividiren, um zu erfahren, wie oft in diesem 100 enthalten sey, und den Quotienten mit der Zahl der Tage multipliziren, was bequemer nach obiger Regel geschieht.

§. 89.

Aufgabe.

Was tragen 8700 fl. zu 4 Prozent in 8 Tagen?

8700 69600 23200 464|00	Da 4 = 6 — 2 so wird es zu 4 Prozent so viel als zu 6 — 2 Proz. und da 2 der 3te Theil von 6 ist, so wird es zu 2 Proz. den 3ten Theil von dem machen, was es zu 6 Prozent macht.

Also (464 kr.) 7 fl. 44 kr.

§. 90.

Aufgabe. Jemand hatte ein Kapital zu 5 Prozent mit der Bedingung aufgenommen, das Kapital nebst den treffenden Interessen nach Verlauf von 4 Jahren heimzuzahlen. Da bezahlte er nun 960 fl. Wie groß war das Kapital? In solchen Fällen berechnet man zuerst was 100 fl. in der gegebenen Zahl von Jahren tragen, und schlägt diese Interessen zu 100. Dann verfährt man also:

Wie viele Gulden Kapital muß man ausleihen	um 960 fl. an Kapital und Interessen zu erhalten,
Wenn man um 120 fl. an Kapital und Interessen zu erhalten	100 fl. Kapital ausleihen muß.

Also

x.	960
120	100
	8
Antw.	800 fl.

§. 91.

Aufg. Jemand hat von seinem Kapitale, das er $2\frac{1}{2}$ Jahr lang zu $4\frac{1}{2}$ Prozent ausgeliehen hatte, im

Ganzen 200 fl. Interessen bezogen. Wie groß war das Kapital?

1. Kapital fl. x. tragen in Jahren $2\frac{1}{2}$	2. 200 fl. Interessen, wenn
4. Interessen fl. $4\frac{1}{2}$ tragen	3. 100 fl. Kapital in 1 Jahre

oder

x.	200
$2\frac{1}{2}$	
$4\frac{1}{2}$	100
	1
8	2
9	2
	40

$9 : 10000 = 1777\frac{7}{9}$

§. 92.

Aufg. Zu wie viel Proz. hatte man 7800 fl. Kapital angelegt, wenn sie in $2\frac{1}{2}$ Jahren 780 fl. getragen haben?

Interessen fl. x.	tragen 100 fl. Kapital in 1 Jahre
wenn Kapital fl. 7800 in Jahren $2\frac{1}{2}$	780 fl. Interessen tragen.

oder:

x.	100
7800	1
$2\frac{1}{2}$	780
	2
5	10
	2
	4

Das Kapital war also zu 4 Prozent angelegt.

E. Berechnung der Interessen auf Interessen.

§. 93.

Um zu berechnen, wie groß ein Kapital zu m* pCt. ausgeliehen in n* Jahren werde, wenn die jährlich verfallenen Interessen zum Kapital geschlagen, und von der Verfallzeit an auch mit verinteressirt werden, kann man nach folgender Regel verfahren:

Man multiplizire das Kapital n mal (also so oft, als es Jahre sind) mit 100 + m (also mit 100 wozu die Interessen eines Jahres geschlagen sind) und schneide dem Produkte von der Rechten zur Linken n mal zwei Zifferstellen ab. (Also 2mal so viel als es Jahre sind), die Links fallenden Ziffern geben das Kapital sammt den Interessen, die rechts fallenden löse man nach der gewöhnlichen Art in die nächst niedrige Geldsorte auf, schneide eine gleiche Zifferzahl ab u. s. w. bis man eben zur niedrigsten Geldsorte herabgekommen ist.

Das Verfahren kann man aus dem Kettensatze herleiten. Hätte man z. B. zu berechnen, was 500 fl. zu 4 Prozent in 3 Jahren werden, wenn das jährlich verfallene Interesse zum Kapital geschlagen und mit verinteressirt wird, so würde man folgenden Kettensatz ansetzen.

Wie viele Gulden Kapital und Interesse	werden 500 fl. Kapital
Wenn 100 fl. Kapital nach Einem Jahre	104 fl. Kapital und Interesse sind,

*) m und eben so auch n können jede Zahl bezeichnen zu m pCt. in n Jahren kann also heißen zu 4, 5 oder 6 u. s. w. pCt. in 1, 2, 3 oder 4 u. s. w. Jahren.

und wenn 100 fl. von dieser nun als Kapital betrachteten Summe nach Einem Jahr	104 fl. Kapital und Interesse sind,
und wenn davon 100 fl. nach Einem Jahre	104 fl. Kapital und Interesse sind.

*Man sieht hieraus, daß das Kapital 3mal mit 100, wozu die Prozente geschlagen sind, multiplizirt, und mit 100 X 100 X 100 also mit 1000000 dividirt werde, daß man also ganz nach obiger Regel verfährt.

§. 94.

Aufgabe. Was werden 500 fl. zu 4 Prozent in 5 Jahren, wenn die jährlich verfallenen Interessen zum Kapital geschlagen, und mit verinteressirt werden?

Auflösung.

```
     500       Man denke sich an 500 zwei Nullen, so
      2000     ist es 100mal genommen, unten ist
1)   52000     es dann noch 4mal genommen worden.
      208000
2)   5408000
      21632000
3)   562432000
      2249728000
4)   58492928000
      233971712000
5)   608|3264512000
        19|5870720000
         4|0965760000
```

Also 608 fl. 19 kr. 4 hl.

Die Interessen allein betragen also 108 fl. 19 kr. 4 hl.

F. Rabatt-Rechnung.

§. 95.

Rabatt ist ein Abzug der Zinsen von einem Kapital, welches vor der Verfallzeit bezahlt wird. Wenn A von B ein Haus um 5000 fl. kauft, mit der Bedingung, daß diese Summe erst über 1 Jahr bezahlt werden soll, und B wünscht diese Summe sogleich zu haben, so kann ihm A willfahren, wenn ihm wegen dieser Vorausbezahlung ein Abzug von 5 Prozent als Zinsen gestattet wird. Er bezahlt eben nur so viel, daß die baare Bezahlung mit den zu 5 Prozent berechneten Zinsen über 1 Jahr gerade 5000 fl. ist. Er bezahlt ihm nämlich für 105 fl. blos 100 fl. baar, weil jedes Hundert Gulden jetzt nach einem Jahre mit den Interessen 105 fl. ist. Nun kann sehr leicht durch den Kettensatz berechnet werden, was gibt man jetzt für 5000 fl. dann, wenn 105 fl. dann nur 100 fl. jetzt sind. So erhält man die sogleich zu gebende Summe. Zieht man diese von 5000 fl. ab, so findet man den zu machenden Abzug, welcher **Rabatt**, **Vorauszins**, Interusurium genannt wird. Im Handel aber versteht man unter Rabatt überhaupt einen Geldnachlaß, welcher dem Käufer bewilliget wird, und den man auch anders berechnet. Oft wird es nämlich dem Käufer freigestellt, die Zahlung sogleich oder erst nach 6 Monaten oder gar nach einem Jahre jedoch mit mehr oder weniger Prozent Rabatt zu leisten. Heißt es da mit 8 Prozent Rabatt, so gibt er eben für 100 fl. nur 92 fl. Auch bei Wechseln, die vor der Verfallzeit bezahlt werden, wird der Rabatt auf letztere Art berechnet. Dieser Abzug wird auch wohl Diskonto genannt, und man sagt, der Wechsel sey mit $\frac{1}{2}$ oder 1 Prozent diskontirt. Auch bei Geldzahlungen wird der Ausdruck Diskonto gebraucht, und ist dann oft dem Agio (Aufgeld) entgegengesetzt. Was ich für 100 fl. in guter Geldsorte mehr erhalte, wenn ich Münze dafür nehme, nennt man **Agio**. Was ich für 100 fl. Münze weniger erhalte, wenn ich eine gute Geldsorte dafür will, nennt man **Diskonto**.

§. 96.

A hat an B nach $2\frac{1}{2}$ Jahren 6000 fl. zu bezahlen. Wie viel muß er ihm sogleich geben, wenn er den Rabatt zu 5 Prozent berechnet?

x.	~~6000~~
~~$112\frac{1}{2}$~~	~~100~~
~~225~~	2
~~45~~	~~20~~
~~9~~	4
3	2000

$3 : 16000 = 5333\frac{1}{3}$ fl.

Der Rabatt beträgt also $666\frac{2}{3}$ fl.

G. Rabatt auf Rabatt.

§. 97.

Wenn A an B die Summe von 1000 fl. erst nach 3 Jahren zu bezahlen hätte, und B wünschte gleich bezahlt zu seyn, so kann A einwenden: Ich kann meine 1000 fl. ein Jahr zu 5 Prozent anlegen, und erhalte also 1050 fl., das zweite Jahr kann ich 1050 anlegen u. s. f. Ich will Dir daher nur so viel baar bezahlen, daß diese Summe, wenn du sie auch 3 Jahre zu 5 Prozent angelegt, und immer den Zins zum Kapital geschlagen hast, wie ich es thun würde, zu 1000 fl. anwächst. Der auf diese Art zu machende Abzug heißt Rabatt auf Rabatt, und wird fast eben so berechnet wie die Interessen auf Interessen. Hier nur die Auflösung des obigen Beispieles.

1.	2.
x. fl. hat man sogleich zu geben	für 1000 fl., die erst nach 4 Jahren zahlbar sind,
4.	**3.**
nach einem Jahre 105 fl. sind,	Wenn 100 fl., die ich sogleich gebe,

6. nach dem zweiten Jahre 105 fl. sind,	5. und wenn davon 100 fl.
8. nach dem dritten Jahre 105 fl. sind.	7. und wenn davon wieder 100 fl.

Also

x	1000
21 ~~105~~	~~100~~ 20
21 ~~105~~	~~100~~ 20
21 ~~105~~	~~100~~ 20

$$9261 : 8000000 = 863\tfrac{7757}{9261}.$$

59120

35540

7757

Der Bruch $\frac{7757}{9261}$ wird durch Annäherung (Approximation) bestimmt. $\frac{7757}{9261}$ ist beinahe $\frac{775}{926}\frac{0}{0}$ beinahe $\frac{775}{925} = \frac{155}{185} = \frac{31}{37}$ beinahe $\frac{30}{36} = \frac{5}{6} = 50$ kr.

Der Abzug beträgt also 136 fl. 10 kr.

H. Prozent-Rechnung ohne Zeit.

§. 98.

So nennt man die Kaufmännischen Berechnungen bei Waaren, Fracht u. dgl., deren Betrag blos pro Cent ohne Rücksicht auf Zeit bestimmt wird. Hieher gehört auch die Berechnung der Provision, die ebenfalls pro Cent bezahlt zu werden pflegt. Provision nennt man das, was man irgend einem Commissionär, Spediteur, Wechsler u. s. w. für seine Mühe gibt.

Die Provision wird gefunden, wenn man das Kapital mit den Prozenten multiplizirt, und vom Produkte zwei Zifferstellen abstreicht.

Man sucht auf diese Art wie oft im Kapital 100 enthalten sey, und setzt so oft als dieses enthalten ist, die festgesetzte Summe.

§. 99.

Aufgabe. Was trifft einen Spediteur von 1620 fl. wenn ihm $2\frac{1}{2}$ Prozent bewilligt sind?

Auflösung.

$$\begin{array}{r} 1620 \\ \hline 3240 \\ 810 \\ \hline 40|50 \\ \hline 30|00 \end{array}$$

Also 40 fl. 30 kr.

§. 100.

Der Verkaufspreis einer Waare wird gefunden, wenn man den Einkaufspreis mit 100, wozu die Prozente, welche man gewinnen will, geschlagen sind, multiplizirt, und vom Produkte zwei Zifferstellen abschneidet. Wenn man nämlich für 100 fl. Auslage 112 fl. einnehmen (also 12 Prozent verdienen) will, so wird man so oft 112 einnehmen müssen als 100 fl. in der ausgelegten Summe enthalten sind.

§. 101.

Aufgabe. Wie hoch muß man den Zentner einer Waare verkaufen, wenn man ihn um 70 fl. 30 kr. gekauft hat, und 12 Prozent dabei gewinnen will?

$$\begin{array}{rl} 112 & = 100 + 12 \\ \hline 7840 & = 112 \times 70 \\ 56 & = 112 \times \frac{1}{2} \\ \hline 78|96 & = 112 \times 70 \text{ und } \frac{1}{2} \\ \hline 57|60 & \\ \hline 4|80 & \end{array}$$

Also um 78 fl. 57 kr. 4 hl.

§. 102.

Um den Einkaufspreis einer Waare zu finden, multiplizirt man den Verkaufspreis mit 100, und dividirt das Produkt mit 100, wozu die zugewinnenden Prozente geschlagen sind. Man will nämlich nur so oft 100 fl. dafür geben, als man 112 fl. (wenn man eben 12 Prozent verdienen will) dafür einnehmen kann.

§. 103.

Aufgabe. Wie theuer darf der Zentner einer Waare gekauft werden, wenn man ihn um $7\frac{1}{2}$ fl. verkaufen, und 5 Prozent gewinnen will?

$$(7\tfrac{1}{2} \times 100) : 105 = \frac{750}{105} = \frac{150}{21} = \frac{50}{7} = 7\tfrac{1}{7}$$

Also um $7\frac{1}{7}$ fl.

J. Tara- oder Waaren-Abzugsrechnung.

§. 104.

Unter Netto versteht man die reine unverdorbene Waare uneingepackt; unter Bruto oder Sporco versteht man die Waare sammt den Packmaterialien oder der Emballage. Die Packmaterialien selbst nennt man Tara. Unter Fusti versteht man die durch den Transport verdorbene Waare, welche geringer bezahlt wird.

Die Tararechnung wird in die Tararechnung überhaupt, und in die Taraprozentrechnung eingetheilt. Bei der ersten wird die Tara von dem Bruto abgezogen (wie das Gewicht des Wagens von dem des Heues und Wagens), und der Betrag regelmäßig gesucht. Da aber bei allen flüssigen Waaren Tara und Netto nicht wohl getrennt werden können, um die Tara besonders abzuwägen, so wird bei diesen und auch bei vielen andern Waaren der Bequemlichkeit halber die Tara nach Prozent bestimmt. Dieß gibt die Tara Prozent-Rechnung.

§. 105.

Aufgabe. Was kosten 72 ½ Ctr. Sp., wenn 1 Ctr. Netto 7 ½ fl. kostet, und die Tara 1 ½ Ctr. beträgt?

$$\begin{array}{r} 72\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \\ \hline 71 \\ \hline 497 \\ 35\frac{1}{2} \\ \hline 532\frac{1}{2} \end{array}$$

Also 532 fl. 30 kr.

§. 106.

Aufgabe. Was kosten 27 ½ Ctr. Sp., wenn 1 Ctr. Netto 5 fl. 30 kr. kostet, und außerdem noch 10 Prozent Tara und 5 Prozent Rabatt berechnet werden.

x. fl. kosten	2750 ℔. Sp.
wenn 100 ℔. Sp.	der Tara wegen nur für 90 ℔. Netto gerechnet werden,
und wenn davon 100 ℔.	5 ½ fl. kosten,
und wenn 105 fl. von diesem Betrage (hier könnte es statt 105 auch 100 heißen)	des Rabatts wegen nur mit 100 fl. bezahlt werden. (Hier könnte es statt 100 auch 95 heißen, denn es ist schon oben bei der Rabattrechnung bemerkt worden, daß bei Waarenzahlungen der Rabatt häufig auf diese Art berechnet werde).

Also

x.	2750
100	90
100	$5\frac{1}{2}$
105	100
2	11
24	55
7	3

$$14 : 1815 = 129\tfrac{9}{14}$$

```
14 : 1815 = 129 9/14
      41
      135
        9
```

Also $129\frac{9}{14}$ fl.

§. 107.

Aufgabe. Was kosten $47\frac{1}{2}$ Ctr. Sp., wenn der Zentner Netto $25\frac{1}{2}$ fl. kostet, ausserdem 5 Prozent Rabatt und 6 Prozent Tara, nebenbei 20 Proz. Fusti, wovon der Zentner 18 fl. kostet, in Rechnung gebracht wird? (Der Fustibetrag wird besonders berechnet, und zum Nettobetrag addirt.)

x.	4750
100	94
100	80
100	$25\frac{1}{2}$
105	100
2	51
20	95
21	19
5	2
7	17

$35 : 30362 = 867$ fl. $29\frac{1}{8}$ kr.

x,	4750
100	94
100	20
100	18
105	100
20	95
21	19
10	9
5	3
7	

$35 : 5358 = 153$ fl. $5\frac{1}{8}$ kr.

Nettobetrag	867 fl.	29 kr.	1 hl.
Fustibetrag	153 „	5 „	1 „
Totalbetrag	1020 fl.	34 kr.	2 hl.

K. Gesellschafts-Rechnung oder Division in verhältnißmäßige Theile.

§. 108.

So nennt man jene Berechnungen, durch welche ein gegebenes Ganzes so getheilt wird, daß sich die Theile zu diesem Ganzen verhalten, wie die Theile eines andern gegebenen Ganzen sich zu demselben verhalten. So müssen sich die einzelnen Antheile an einem Gewinnste zum ganzen Gewinnste verhalten, wie sich die einzelnen Einlagen zur Gesammteinlage verhalten. Wenn daher die Gesammteinlage, der Gesammtgewinn, und die partiale Einlage eines Einzelnen gegeben sind, so läßt sich des letztern Partialgewinn durch eine Regel detri oder einen Kettensatz finden.

§. 109.

Aufgabe. Drei Brüder unternahmen gemeinschaftlich ein Geschäft. Der erste A trat mit 1800 fl., B mit 1200 fl. und C mit 1000 fl. in die Gesellschaft. Sie gewannen zusammen 10000 fl. Wie viel trifft jeden vom Gewinnste?

Auflösung.

A legt ein	18	00 *)	
B „ „	12	00	
C „ „	10	00	
	40	00	

*) Wenn man alle Theile und das Ganze selbst mit Ein und derselben Zahl dividirt, wie hier mit 100, so bleibt das Verhältniß der einzelnen Theile zum Ganzen unverändert. Denn wie 1000 der vierte Theil von 4000 ist, so ist auch 10 der vierte Theil von 40; immer ist also das Verhältniß, wie 1 zu 4.

x.	18
40	10000
2	9
	500
	4500

A erhält also 4500 fl.

Da 12 = $\frac{2}{3}$ von 18 ist, so wird derjenige der 12 eingelegt hat, auch $\frac{2}{3}$ von 4500 fl., also das Ganze weniger $\frac{1}{3}$ erhalten.

$$\begin{array}{r} 4500 \\ 1500 \\ \hline 3000 \end{array}$$ B erhält also 3000 fl.

Da 10 = $\frac{5}{6}$ von 12 so wird der, welcher 10 eingelegt hat, $\frac{5}{6}$ von 3000, d. i. das Ganze weniger $\frac{1}{6}$ erhalten.

$$\begin{array}{r} 3000 \\ 500 \\ \hline 2500 \end{array}$$ C erhält also 2500 fl.

§. 110.

Sind die Bedingungsglieder, nach welchen die Gewinnste regulirt werden, zusammengesetzt, wie Arbeiter, Tage, Stunden, die sie täglich arbeiten, oder Kapital und Zeit, so werden sie wie bei der Regel detri mit einander multiplizirt. Z. B. A, B, C und D gruben mit einander einen Brunnen, wofür sie 180 fl. bekamen. A hatte 9 Tage und zwar täglich 5 Stunden, B 5 Tage täglich 8 Stunden, C 4 Tage täglich 5 Stunden und D 3 Tage täglich 5 Stunden gearbeitet. Wie viel trifft Jeden?

A	$9 \times 5 = 45$		9
B	$5 \times 8 = 40$	mit 5 verkleinert	8
C	$4 \times 5 = 20$		4
D	$3 \times 5 = 15$		3
			24

$$\begin{array}{rr} x. & 9 \\ 24 & 180 \\ 2 & 15 \\ \hline \end{array}$$
$$2 : 135 = 67\tfrac{1}{2}$$

A erhält also $67\frac{1}{2}$ fl.

Da $8 = \frac{8}{9}$ von 9 ist, so wird B $\frac{8}{9}$ von $67\frac{1}{2}$ oder das Ganze weniger $\frac{1}{9}$ erhalten.

$$\begin{array}{r} 67\tfrac{1}{2} \\ 7\tfrac{1}{2} \\ \hline 60 \end{array}$$
B erhält also 60 fl.

Da 4 die Hälfte von 8 ist, so wird auch C die Hälfte von 60, also 30 fl. erhalten.

Da endlich $3 = \frac{3}{4}$ von 4 ist, so wird D auch $\frac{3}{4}$ von 30 d. i. das Ganze weniger $\frac{1}{4}$ erhalten.

$$\begin{array}{r} 30 \\ 7\tfrac{1}{2} \\ \hline 22\tfrac{1}{2} \end{array}$$
D erhält also $22\frac{1}{2}$ fl.

L. Von den Erbschaftstheilungen.

§. 111.

Wenn Jemand stirbt, so geht das Recht des Besitzes seines hinterlassenen Vermögens auf andere Personen über, die entweder durch ein vorhandenes Gesetz oder durch eine eigene gesetzlich gemachte Willenserklärung (Testament) des Verblichenen hiezu bezeichnet werden. Letztere nennt man die **Erben**, den Verstorbenen den **Erblasser**. Die Erben sind entweder **Intestaterben**, d. i. solche, welche wegen ihrer Verwandtschaft mit dem Erblasser zur Erbschaft gerufen werden, wenn letzterer gar kein oder ein ungiltiges Testament gemacht hat; oder **testamentarische Erben**, welche durch das Testament des Verstorbenen als solche bezeichnet sind. Erstere wie Letztere sind zu unterscheiden von dem **Legatar**. Die Erben, sey es einer oder mehrere, treten nämlich in

alle Rechte und Verpflichtungen des Verstorbenen ein nehmen, wenn sie die Erbschaft nicht mit der Bedingung angetreten haben, daß die Verlassenschaftsmasse zur Deckung der Schulden hinreichend sey, alle Activa und Passiva auf sich; der Legatar aber erhält nur einen gewissen genau bezeichneten Theil des hinterlassenen Vermögens, und haftet für keine Schulden des Verblichenen; man nennt seinen Antheil ein Legat.

Damit ein Testament giltig sey, ist unter andern erforderlich, daß die sogenannten Notherben (Descendenten und in Ermanglung dieser die Ascendenten*) entweder im Testamente mit eingesetzt, oder aus einem rechtsgiltigen, im Testamente zu bezeichnenden Grunde, von der Erbschaft ganz ausgeschlossen werden.

Ist letzteres nicht der Fall, so müssen die Notherben wenigstens den sogenannten Pflichttheil erhalten. Dieser beträgt für die Descendenten, wenn ihrer vier oder weniger sind, ein Dritttheil, und wenn ihrer mehr als vier sind, die Hälfte dessen, was sie erhalten hätten, wenn der Erblasser kein Testament gemacht hätte. Für die Ascendenten aber beträgt der Pflichttheil immer nur ein Viertheil dessen, was sie als Intestaterben erhalten hätten.

Hat der Testator Legate gemacht, so dürfen diese wohl weniger aber in keinem Falle mehr als $\frac{3}{4}$ seines reinen Vermögens betragen, so daß den Erben vorausgesetzt, daß sie nicht auf einen Pflichttheil Anspruch machen können, immer noch $\frac{1}{4}$ desselben übrig bleibt.

*) Descendenten nennt man die Kinder, Enkel, Urenkel u. s. w. des Erblassers; Ascendenten sind die Aeltern, Großältern u. s. w., kurz jene, von denen der Erblasser ein Descendent ist.

§. 112.

Die Erbschaftstheilungs-Rechnungen sind in Fällen, wo keine besondere Legate gemacht, und die Erben unter sich gleichgehalten werden, bloße Divisionen, bei denen die Zahl der Erben der Divisor, die reine Erbschaftsmasse aber der Dividend ist. Z. B.

Ein Vater hinterläßt 5 Kinder und eine Witwe, welche nach den Eheverträgen (Ehepakten) einen Kindestheil erhält. Wie viel bekommt jeder der 6 Erben, wenn die reine Erbschaftsmasse 4800 fl. beträgt?

Antw. 800 fl.

§. 113.

Hat der Erblasser besondere Legate gemacht, oder bestimmte Summen festgesetzt, um welche der eine oder andere Erbe mehr erhalten solle als die übrigen, so addirt man diese zuerst, und subtrahirt ihre Summe von der Masse, den Rest vertheilt man dann wie oben. Z. B.

Ein Vater hinterläßt 90000 fl. und 4 lebende Kinder, 3 Enkel, Kinder seines verstorbenen Sohnes, für die er ein Prälegat von 6000 fl. bestimmt hat, und eine Witwe, welche nebst einem Kindestheile 5000 fl. Eingebrachtes erhalten muß. Zugleich hat er für die Armen 800 fl., und für die Schulen 400 fl. ausgesetzt. Wie viel trifft jeden der Erben?

Als Prälegat (im Voraus) erhalten die Enkel	6000 fl.
Als Eingebrachtes erhält die Witwe	5000 „
Als Legat die Armen	800 „
„ „ die Schulen	400 „
	12200 fl.

Masse	90000 fl.
Legate	12200 „
Bleibt zur Theilung	77800 fl.

Dieß in 6 gleiche Theile getheilt (die drei Enkel bekommen nur Einen Theil, nämlich den Antheil ihres Vaters)

$$77800 : 6 = 12966\tfrac{2}{3}$$

Demnach erhält die Witwe	$12966\frac{2}{3}$ 5000	$17966\frac{2}{3}$ fl.	
Die Enkel	$12966\frac{2}{3}$ 6000	$18966\frac{2}{3}$	$6322\frac{2}{9}$ fl. $6322\frac{2}{9}$ „ $6322\frac{2}{9}$ „
Die lebenden Kinder			$12966\frac{2}{3}$ „ $12966\frac{2}{3}$ „ $12966\frac{2}{3}$ „ $12966\frac{2}{3}$ „
Die Armen			800 „
Die Schulen			400 „
Erbschaftsmasse		=	90000 fl.

§. 114.

Haben einzelne Erben schon zu Lebzeiten des Erblassers einen Theil ihrer Erbschaft mit der Bedingung erhalten, daß ihnen derselbe später solle in Rechnung gebracht werden, so addirt man dieß zur Masse und theilt diese, wenn keine Legate da sind, nach §. 112., und wenn solche da sind, nach §. 113. Z. B. ein Vater hinterläßt 40000 fl. reines Vermögen, 3 Kinder erster Ehe, welche mit einander 8000 fl. zum Voraus, und 2 Kinder zweiter Ehe, welche mit einander 5000 fl. zum Voraus erhalten. Wie viel erhält jedes Kind, wenn eines A von den Kindern erster Ehe schon 2000 fl. zu Lebzeiten des Vaters erhalten hat?

Im Voraus erhalten die Kinder erster Ehe	8000 fl.
„ „ zweiter Ehe	5000 „
	13000 „
Masse 40000 2000 . . .	42000 fl.
Prälegate	13000 „
Bleibt zur Theilung	29000 „

Dieß in 5 gleiche Theile getheilt

29000 : 5 = 5800

Ein Kind erster Ehe erhält	5800	.	8466⅔ fl.
	2666⅔		8466⅔ „
			A. 6466⅔ „
Ein Kind zweiter Ehe	5800	. .	8300 „
	2500		8300 „
	Erbschaftsmasse	=	40000 fl.

§. 115.

Ist ein bestimmtes Verhältniß für die Antheile der einzelnen Erben gegeben, so betrachtet man den Antheil dessen, der am wenigsten erhält, als 1, und sucht hiernach die Verhältnißzahlen für die Antheile der übrigen Erben, so daß eine gewöhnliche Gesellschaftsrechnung entsteht. Z. B.

Ein Erblasser verordnete, daß sein Nachlaß von 200000 fl. also vertheilt werde: Jeder der 3 Söhne seiner Schwester Amalie solle halb so viel erhalten als letztere, seine Schwester Agathe solle so viel erhalten als Amalie und einer ihrer Söhne zusammen, dann solle das Waisenhaus halb so viel als einer seiner Neffen, und überdieß die Armenanstalt 5000 fl. erhalten. Wie viel trifft jeden der Erben?

Zieht man das Legat von 5000 fl. von der Masse ab, so bleiben zur Vertheilung 195000 fl.

Davon erhält das Waisenhaus	1	1 Theil	$11470\frac{10}{17}$
	2		$22941\frac{3}{17}$
Die Neffen	2	6 Theile	$22941\frac{3}{17}$
	2		$22941\frac{3}{17}$
Amalie		4 Theile	$45882\frac{6}{17}$
Agathe		6 Theile	$68823\frac{9}{17}$
Im Ganzen		17 Theile . .	195000 fl.

$$195000 : 17 = 11470\tfrac{10}{17}$$

```
195000 : 17 = 11470 10/17
 25
  80
   120
    10
```

§. 116.

Ein Vater machte folgendes Testament: Sein jüngster Sohn solle von der ganzen Erbschaftsmasse im Ganzen erhalten 80000 fl. Von den übrigen 6 Söhnen solle immer der jüngere um 2000 mehr erhalten als der zunächst ältere. Wie viel erhält jeder, wenn das ganze reine Vermögen 500000 fl. ist?

Man bezeichne die Söhne vom ältesten abwärts mit a, b, c, d, e, f, g, so erhält im Voraus

a	0
b	2000
c	4000
d	6000
e	8000
f	10000
g	80000
	110000

500000
110000
390000 : 6 = 65000

Es erhält also	a . . .	65000 fl.
	b . . .	67000 „
	c . . .	69000 „
	d . . .	71000 „
	e . . .	73000 „
	f . . .	75000 „
	g . . .	80000 „
Alle zusammen	. .	500000 fl.

§. 117.

Gehören zur Masse Posten, welche nicht sogleich einkassirt werden können, und von denen der eine mehr der andere minder unsicher ist, so muß von je-

dem dieser Posten, wenn keine besondere Willensmeinung des Erblassers darüber verfügt, jedem Erben nach Verhältniß seines Antheiles zugetheilt werden, was wieder nach den Regeln der Gesellschaftsrechnung geschieht. Z. B.

Eine Masse von 12000 fl., worunter sich jedoch ein nicht sogleich einbringlicher Posten von 1500 fl. befindet, wäre so zu vertheilen, daß A 4000, B 1500, C 3500, D 3000 erhielte. Wie viel ist von dem nicht sogleich einzukassirenden 1500 fl. Jedem zuzutheilen?

A 4000 = 8
B 1500 = 3
C 3500 = 7
D 3000 = 6

24

x. 8
~~24~~ ~~1500~~
~~8~~ 375
2

2 | 375 = 187½

Also dem B ist davon zuzutheilen 187½
D 375
C 437½
A 500

1500

So müßte dieß von jedem einzelnen Posten berechnet werden.

§. 118.

Wenn ein Pflichttheilsberechtigter durch das Testament verkürzt ist, so berechnet man vor allen Dingen, wie viel ihn als Intestaterben würde getroffen haben. Dieß dividire man mit 3, wenn er ein Descendent ist, und nur mit 3 oder weniger andern Descendenten gleichen Grades zu theilen gehabt hätte, oder mit 2, wenn er mit mehr als 3 Descendenten gleichen Grades hätte

theilen müssen, oder mit 4, wenn er ein Ascendent ist, so findet man den Pflichttheil. Dieser und wenn es mehrere sind, alle andere Pflichttheile müssen vor allen Dingen von der Masse abgezogen werden. Das noch übrig bleibende Vermögen wird wie oben vertheilt.

Aufgabe. Ein Vater hinterläßt zwei Söhne und eine Tochter, nebst einem reinen Vermögen von 60000 fl. Er setzte seine 3 Kinder als Erben ein, machte jedoch zu Gunsten seiner Tochter ein Prälegat von 38700 fl., dann ein Legat von 500 fl. für seinen Kutscher, und ein Legat von 800 fl. für die Kirche des Orts.

Auflösung. Die Söhne hätten als Intestaterben jeder 20000 fl. erhalten. Da hiebei das Vermögen in nicht mehr als vier (in 3) gleiche Theile gegangen wäre, so ist der Pflichttheil ein Drittel davon, also $6666\frac{2}{3}$ fl.

Es erhält also der Sohn A. . . .	$6666\frac{2}{3}$
der Sohn B. . . .	$6666\frac{2}{3}$
der Kutscher . .	500
die Kirche . . .	800
Summe	$14633\frac{1}{3}$

Also erhält die Tochter $45366\frac{2}{3}$ fl.

§. 119.

Hat ein Testator so viele Legate gemacht, daß den Erben, welchen kein Pflichttheil gebührt, nicht $\frac{1}{4}$ der reinen Masse bliebe, daß also die Legate mehr als $\frac{3}{4}$ der reinen Masse betrügen, so dividire man die reine Masse durch 4. Der Quotient gibt nun den Theil des oder der Erben. Dieß mit 3 multiplizirt gibt die Summe, welche alle Legatare mit einander erhalten. Nun berechnet man nach den Grundsätzen der Gesellschaftsrechnung, wie viel jeden Legatar trifft.

Aufgabe. August setzte den Carl zum Erben seines Vermögens von rein 30000 fl. ein, machte jedoch ein Legat von 9000 fl. für die Invaliden, eines von 8000 fl. für Herstellung eines Schulgebäudes und eines von 10000 fl. für die Armen.

Auflösung. Carl muß als Erbe wenigstens den vierten Theil also 7500 fl erhalten. Die 3 Legatare erhalten also zusammen nur 22500 fl. Nun rechne man wie bei einer Gesellschaftsrechnung.

Invaliden erhalten statt 9000 . . . 7500
Der Schulfond erhält statt 8000 . . $6666\frac{2}{3}$
Die Armen erhalten statt 10000 . . $8333\frac{1}{3}$

Weil die Legate statt 27000 nur 22500 betragen dürfen.

x.	9000	x.	8000	x.	10000
27000	22500	27000	22500	27000	22500
3		3	2500	3	2500
3 | 22500 = 7500		3 | 20000 = $6666\frac{2}{3}$		3 | 25000 = $8333\frac{1}{3}$	

§. 120.

Aufgabe. Ein Vater machte folgendes Testament: Seine Schwester A solle zugleich mit seinen beiden Söhnen erben; jedoch sollten die Söhne auf den Pflichttheil beschränkt werden; die Armen sollten ein Legat von 8000 fl. und die Schulen ein Legat von 1000 fl. erhalten. Was erhalten die Erben und Legatare, wenn das reine Vermögen 30000 fl. betrug.

Auflösung. Jeder Sohn hätte als Intestat-Erbe 15000 fl. erhalten; der Pflichttheil beträgt also für einen 5000 fl. Diese 10000 fl. (für beide Söhne) müssen nun gleich einer Schuld vom Vermögen abgezogen werden, so erhält man das reine Vermögen, welches die Schwester A und die Legatare zu theilen haben. Da letzteren mit einander 20000 fl. bleibt, so muß die Schwester A (als Erbe) den 4ten Theil davon, d. i. 5000 fl. bekommen, die Legate dürfen also nur 15000 fl. nicht 18000 betragen. Nun rechnet man nach der Gesellschaftsrechnung wie viel jeder Legatar erhält.

x.	8000
18000	15000
6	5
3	4000

3 : 20000 = $6666\frac{2}{3}$

Die Armen erhalten also $6666\frac{2}{3}$ fl.
Folglich die Schulen 15000 — $6666\frac{2}{3}$ = $8333\frac{1}{3}$ fl.

M. Gold- und Silberrechnung.

§. 121.

Zu dem Gold und Silber bedient man sich gemeiniglich folgender Gewichte:

1) Troy-Gewicht, bei welchem eine Mark in 8 Unzen à 20 Engels eingetheilt ist.

2) Cölnisch Gewicht, nach welchem eine Mark 8 Unzen oder 16 Loth, oder 24 Karat, oder 64 Quint, oder 256 Pfenning, oder 288 Grän, oder 4352 Eschen oder Aß, oder 65536 Richtpfenninge enthält. (Siehe die am Ende beigefügte Tabelle). Nach demselben wird eine Mark Silber in 16 Loth à 4 Quintel (bei der Angabe des Gewichtes), oder à 18 Grän (bei der Angabe des Gehalts) eingetheilt Eine Mark Gold aber wird in 16 Loth à 4 Quintel (bei der Angabe des Gewichts), oder in 24 Karat à 12 Grän (bei der Angabe des Gehalts) eingetheilt. Also machen 3 Karat 2 Loth. Dieses Kölnischen Gewichtes bedient man sich fast in allen Münzstädten Deutschlands, jenes Troy-Gewichts aber in Holland, Frankreich und sonst verschiedenen Orten.

Das Troy-Gewicht ist etwas schwerer als das Kölnische, so daß man insgemein 19 Mark Troygewicht mit 20 Mark Kölnisch vergleicht.

Auch bedient man sich des Dukaten, Kronen (Goldkronen) oder Goldguldengewichts, wo alsdann 67 Dukaten $69\frac{1}{2}$ Kronen, oder 72 Goldgulden auf eine Kölnische Mark gerechnet werden; nur in Augsburg wird die Kölnische Mark zu $67\frac{5}{8}$ Dukaten oder 70 Kronen gerechnet.

Wenn eine Masse Gold oder Silber ganz rein und ohne Zusatz ist, so nennt man es fein, und zwar ersteres 24 karätig, letzteres 16 löthig.

Man pflegt das Silber mit Kupfer zu vermischen, und wenn man 15 Loth fein Silber und 1 Loth Kupfer zusammenschmelzt, so nennt man die durch diese Mischung erzeugte Mark 15löthiges Silber; nimmt man aber 14 Loth Silber und 2 Loth Kupfer zusammen, so

erhält man 14löthiges Silber. Ueberhaupt sind beim 14löthigen Silber $\frac{14}{16}$ fein Silber und $\frac{2}{16}$ Kupfer, beim 12löthigen $\frac{12}{16}$ fein Silber und $\frac{4}{16}$ Kupfer u. s. w.

Gleichwie das Silber einen Zusatz von Kupfer bekommt, eben so wird auch dem Golde entweder fein oder schlecht (mit Kupfer gemengtes) Silber zugesetzt. Man heißt es dann 23 karätig, wenn in einer Masse, die ein Mark wiegt, 23 Karat fein Gold und 1 Karat Zusatz enthalten ist, oder überhaupt, wenn $\frac{23}{24}$ fein Gold und $\frac{1}{24}$ Zusatz darin enthalten ist.

Diese Vermischung bei Gold und Silber ist aber nicht der Willkühr eines Jeden überlassen, sondern es ist von der Landesregierung festgesetzt, von welchem Gehalte das zu verarbeitende Gold oder Silber zu seyn habe, und von hiezu verpflichteten Personen wird dann das Zeichen dieses Gehaltes auf alles verarbeitete Gold oder Silber geschlagen, welches man die Probe nennt. So muß in Augsburg das verarbeitete Silber 13löthig seyn, d. i. es müssen $\frac{13}{16}$ fein Silber und $\frac{3}{16}$ Kupfer darin enthalten seyn.

Hat man also zu berechnen, wie viel fein Gold oder fein Silber in einer bestimmten Menge 18karäthigen Goldes oder 12löthigen Silbers sey, so darf man im ersten Falle nur $\frac{18}{24}$, im zweiten $\frac{12}{16}$, also in beiden Fällen $\frac{3}{4}$ der ganzen Masse als fein Gold oder fein Silber nehmen.

§. 122.

Aufgabe. Wie viel Mark fein Silber enthalten 24 Mark 10 Loth 13löthiges Silber?

Auflösung. Um $\frac{13}{16}$ zu erhalten, nimmt man $\frac{8}{16}$ oder $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{16}$ oder die Hälfte von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{16}$ oder $\frac{1}{4}$ von $\frac{4}{16}$. Also

24 M.	10 L.	
12 M.	5 L.	
6 „	2 „	2 Q.
1 „	8 „	$2\frac{1}{2}$
20 M.	— L.	$\frac{1}{2}$ Q.

Mithin 20 Mark und $\frac{1}{2}$ Quint.

§. 123.

Aufgabe. Wie viel Mark fein Gold enthalten 24 Mark 18karätiges Gold?

Auflösung.

24 Mark
6
―――――
18 Mark.

Es sind nämlich $\frac{18}{24}$ oder $\frac{3}{4}$ fein, also braucht man nur $\frac{1}{4}$ als Zusatz zu subtrahiren.

§. 124.

Aufgabe. Eine Barre (Plantsche) Silber wiegt 107 Mark 3 Quint und $2\frac{3}{16}$ Pfenninggewicht; ferners enthält die Mark 5 Loth $17\frac{1}{2}$ Grän fein. Wie viel fein Silber hält die ganze Plantsche? (Außer dem kleinsten Gewichte also hier ausser dem Pfenninggewichte nehme man noch Viertel, Sechzehntel und Vierundsechzigstel des Pfenninggewichtes an).

	M.	L.	Q.	Pf.	4tel	16tel	64tel	256tel	
	107	—	3	2	—	3	—		
a)	26	12	—	3	2	—	3	—	
b)	6	11	—	—	3	2	—	3	
c)	3	5	2	—	1	3	—	1	2
d)	2	3	2	2	3	3	1	2	1
e)	—	11	3	2	1	1	—	2	—
f)	—	2	3	3	2	1	1	—	2
	39	15	1	1	2	3	3	1	1

Also 39 Mark, 15 Loth, 1 Quint, 1 und $\frac{2}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64}$ also $1\frac{3}{4}$ Pfenninggewicht.

Wenn nämlich in jeder Mark 4 Loth fein Silber sind, so ist der vierte Theil der ganzen Masse fein Silber, wie Lit. a.

Nun ist aber ausserdem in jeder Mark noch Ein Loth fein Silber. Dieß ist der vierte Theil von 4

Loth, also der vierte Theil von Lit. a. mithin der Betrag von Lit. b.

Ferner sind in jeder Mark noch 9 Gran fein Silber d. i. $\frac{1}{2}$ Loth, folglich die Hälfte dessen was in Lit. b. also der Betrag von Lit. c.

Ueberdieß sind noch 6 Grän also $\frac{1}{3}$ Loth in jeder Mark, also das Drittel von Lit. b., mithin der Betrag von Lit. d.

Dann sind noch 2 Grän fein Silber in jeder Mark, d. i. das Drittel von 6 Grän; mithin der dritte Theil von Lit. d.; also der Betrag von Lit. e.

Endlich ist noch $\frac{1}{2}$ Grän in jeder Mark, also das Viertel von 2 Grän; mithin der vierte Theil von Lit. e. oder der Betrag von Lit. f.

§. 125.

Eine Goldbarre (Goldplantsche) von 10 Mark, 9 Loth, 3 Quint, 1 Pfenninggewicht, hält in der Mark 22 Karat 7 Grän fein. Wie viel fein Gold hält die ganze Barre?

Mark	L.	Q.	Pf.	4tel	16tel	64tel	256tel
10	9	3	1	—	—	—	—
5	4	3	2	2			
2	10	1	3	1			
1	5	—	3	2	2		
—	7	—	1	—	3	1	1
—	3	2	—	2	1	2	2
—	—	2	1	1	2	3	3
9	15	3	—	2	1	3	2

Also 9 Mark, 15 Loth, 3 Quint und ($\frac{2}{4} + \frac{1}{16} + \frac{3}{64} + \frac{1}{128}$) oder $\frac{79}{128}$ Pfenninggewicht, d. i. $\frac{158}{256}$ Pfenninggewicht oder 158 Richtpfenninge.

*Auf ähnliche Weise, wie im vorigen Paragraph hat man hier angenommen, es seyen in jeder Mark 12 Karat also die Hälfte der Masse, 6 nämlich die Hälfte von 12; dann 3, nämlich die Hälfte von 6 und endlich 1 Karat, oder $\frac{1}{3}$ von 3. Ferner 6 Grän, oder die Hälfte von 1 Karat, und 1 Grän oder das Sechstel von 6 Grän.

N. Alligations- oder Mischungs-Rechnung.

§. 126.

Die Alligationsrechnung lehrt das Verhältniß finden, nach welchem Gegenstände von verschiedenem Gehalte oder Werthe mit einander vermengt werden müssen, um eine bestimmte Quantität eines Gemenges von einem bestimmten mittleren Werthe oder Gehalte zu bekommen, oder auch den Gehalt des Gemenges finden, wenn bestimmte Quantitäten von Dingen verschiedenen Gehalts mit einander vermischt werden. Sie ist dem Metallarbeiter besonders nöthig und überhaupt für Jedermann von entschiedenem Nutzen. Durch Beispiele dürfte sie am leichtesten erlernt werden. Hat man z. B. zu berechnen, wie viel Maß Wein à 10 kr. und wie viel à 28 kr. man mit einander vermengen müsse, um einen Wein à 16 kr. zu bekommen, so mache man 2 senkrechte Striche. Zwischen diese setze man die Preise der beiden Sorten, welche vermischt werden sollen, unter einander. Vor den ersten Strich setze man den Preis der durch die Mischung zu erzeugenden Sorte. Hinter den zweiten Strich schreibe man nun die Differenzen, und zwar die Differenz zwischen der geringen und mittleren Sorte neben die bessere, die zwischen der mittleren und bessern neben die geringere. Diese Zahlen geben nun an, wie viele Maß man von den unmittelbar vor ihnen stehenden Sorten nehmen müsse. (Diese Differenzen dürfen übrigens auch durch eine und dieselbe Zahl dividirt werden.)

16	10	12	oder	2 Mß. à 10 kr. = 20 kr.
	28	6	—	1 Mß. à 28 kr. = 28 kr.
				3 Mß. à 16 kr. = 48 kr.

Also von der geringeren Sorte 2, von der besseren 1 Maß, Eimer, Fuder u. s. w.

Jedermann sieht ein, daß man, wenn man vom geringern Weine die Maß um 16 kr. verkauft, an jeder Maß 6 kr. gewinnt, also wenn man 12 Maß verkauft, 12mal 6 kr. oder 1 fl. 12 kr. profitirt. So

auch, wenn man von der bessern die Maß um 16 kr. verkauft, daß man an jeder Maß 12 kr., an 6 Maß folglich 6mal 12 kr. oder 1 fl. 12 kr. verliert. Es deckt folglich der obige Gewinnst genau diesen Verlust.

§. 127.

Aus viererlei Gattungen Wein à 6, 8, 14 und 19 kr. soll eine Mittelsorte zu 12 kr. erzeugt werden, wie viel muß man von jeder Sorte nehmen?

12	6	7 Maß à 6 kr.	— fl.	42 kr.
	8	2 Maß à 8 kr.	— fl.	16 kr.
	14	4 Maß à 14 kr.	— fl.	56 kr.
	19	6 Maß à 19 kr.	1 fl.	54 kr.
		19 Maß à 12 kr.	3 fl.	48 kr.

Hier kann man auch die Quantitäten der beiden geringeren und der beiden besseren Sorten unter sich wechseln.

Nämlich	2 Maß à 6 kr.	— fl.	12 kr.
	7 Maß à 8 kr.	— fl.	56 kr.
	6 Maß à 14 kr.	1 fl.	24 kr.
	4 Maß à 19 kr.	1 fl.	16 kr.
	19 Maß à 12 kr.	3 fl.	48 kr.

Uebrigens läßt sich jede Aufgabe dieser Art nach Belieben vereinfachen. Ich nehme von zwei oder auch drei beliebigen Sorten gleiche Theile zusammen z. B. von jeder der 3 ersten Sorten eine Maß, so erhalte ich statt dieser drei Sorten eine neue, wovon die Maß nur $9\frac{1}{3}$ kr. kostet und ich habe nun blos diese einzige Sorte mit der 4ten zu verbinden.

12	$9\frac{1}{3}$	7 Maß à $9\frac{1}{3}$	= 1 fl. $5\frac{1}{3}$ kr.
	19	$2\frac{2}{3}$ Maß à 19 kr.	= — fl. $50\frac{2}{3}$
		$9\frac{2}{3}$ à 12 kr.	= 1 fl. 56 kr.

Dieß dürfte wohl die bequemste Art seyn.

§. 128.

Da auf vorstehende Art die Verhältnißzahlen, die übrigens für Maß eben so gut wie für Eimer oder Fuder gelten, zu der Mischung gefunden worden sind, wenn man 19 Maß mittlerer Sorte erzeugen wollte, so kann man durch die Regel detri sehr leicht (wie bei der Gesellschaftsrechnung) finden, wie viel man von jeder Sorte zu nehmen habe, wenn ein bestimmtes Quantum mittlerer Sorte erzeugt werden soll. Gesetzt im vorigen Paragraph wären 48 Eimer à 12 fl. verlangt worden, so würde man eben so ansetzen:

$$\begin{array}{ccc} x. & & 48 \\ 19 & & 7 \\ \hline 19 & : & 336 = 17\tfrac{13}{19} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x. & & 48 \\ 19 & & 2 \\ \hline 19 & : & 96 = 5\tfrac{1}{19} \end{array}$$

Da $4 = 2 \times 2$, so wird man von der dritten Sorte 2mal $5\frac{1}{19}$ nehmen $= 10\frac{2}{19}$

Und eben so von der 4ten 3mal $5\frac{1}{19} = 15\frac{3}{19}$

$$\overline{48}$$

§. 129.

Aufgabe. Jemand will aus 20, 18, 16 und 12 karätigem Golde 20 Mark 15karätigen Goldes erzeugen. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

Auflösung. Hier kann man gleiche Theile vom 20, 18 und 16karätigen Golde nehmen, so gibt dieß 18karätiges Gold. Man hat also nur zu berechnen, wie viel 18karätiges und wie viel 12karätiges zusammen zu schmelzen sey, um 15karätiges Gold zu erhalten.

$$15\left|\begin{array}{c|c} 18 & 3 \\ 12 & 3 \end{array}\right.$$

Also von beiden Theilen 3 Theile. Da aber unser 18karätiges Gold aus drei verschiedenen Sorten gleich-

mäßig zusammengesetzt werden muß, so werde ich zur Erzeugung der drei Theile 18karätigen Goldes von jeder der drei oben bemerkten Sorten den 3ten Theil nehmen müssen, d. i. von jeder einen Theil. Man braucht also vom 20, 18 und 16karätigen Golde von jeder Sorte $3\frac{1}{3}$ Mark, vom 12karätigen aber 10 Mark.

O. Reduktionen der gewöhnlichsten Münz-Sorten.

§. 130.

Wenn aus einer Mark fein Silber 20 fl. geprägt werden, so sagt man, es ist dieses Geld im zwanzig Gulden Fuße geprägt, es ist gut Geld. Macht man aber aus einer Mark fein Silber 24 fl., so sagt man, es sey dieses Geld im 24 fl. Fuß geprägt, es ist schlecht Geld. Da man nun beim Gelde stets darauf sieht, wie viel reines Silber darin enthalten sey, so sind 24 fl. schlecht Geld gleich 20 fl. gut Geld.

§. 131.

Wenn gut Geld in schlecht Geld verwandelt werden soll, so addire man das Fünftel; denn schlecht Geld macht man aus einer feinen Mark um $\frac{1}{5}$ mehr als gut Geld. Es sollen z. B. 986 fl. 20 kr. gut Geld in schlecht Geld verwandelt werden.

986 fl.	20 kr.	gut Geld
197 „	16 „	
1183 fl.	36 kr.	schlecht Geld.

§. 132.

Um schlecht Geld in gut Geld zu verwandeln subtrahirt man $\frac{1}{6}$, weil aus einer feinen Mark um $\frac{1}{6}$ weniger gut Geld als schlecht Geld gemacht wird.

1183 fl.	36 kr.	schlecht Geld
197 „	16 „	
986 fl.	20 kr.	gut Geld.

§. 133.

Um Gulden schlecht Geld (von nun an ist immer schlecht Geld zu verstehen) in Reichsthaler à 1 fl. 30 kr. zu verwandeln subtrahire man von den Gulden das Drittel. Denn da drei Gulden = 2 Reichsthaler, so wird die Zahl der Reichsthaler um den dritten Theil kleiner seyn als die der Gulden.

964 fl. 30 kr.
321 „ 30 „
643 Rthlr.

§. 134.

Hat man Reichsthaler in Gulden zu verwandeln, so addire man die Hälfte, d. i. man multiplizire mit $1\frac{1}{2}$, weil jeder Reichsthaler = $1\frac{1}{2}$ fl.

643 Rthlr.
$321\frac{1}{2}$
$964\frac{1}{2}$ fl.

§. 135.

Sollen Gulden zu Conventionsthalern à 2 fl. 24 kr. gemacht werden, so hänge man ihnen eine Nulle an (sind auch Kreuzer gegeben, so setze man die Zahl der in diesen enthaltenen Sechser an die Stelle der Null) und dividire mit 6 und 4, d. i. man mache die Gulden zu Sechsern, und dividire dann mit 24, weil jeder Conventionsthaler = 24 Sechser.

548 fl. 48 kr.
5488 | 4 Sechser *)
914 | 2 Sechsunddreißiger.
228 |

Also 228 Conventionsthaler und 1 fl. 36 kr.

*) Wenn man nämlich die Sechser durch 6 dividirt, so macht man sie zu Sechsunddreißigern, der Rest sind Sechser. Dividirt man die Sechsunddreißiger durch 4, so macht man sie zu Conventionsthalern und der Rest sind Sechsunddreißiger.

§ 136.

Sollen Conventionsthaler zu Gulden gemacht werden, so multiplizirt man sie mit 6 und mit 4, und schneidet ein Ziffer ab; der Rest sind Sechser, d. i. man macht sie zu Sechsern und diese zu Gulden.

536 Conventionsthaler
3216
1286|4

Also 1286 fl. 24 kr.

§. 137.

Sollen Gulden zu Kronenthalern gemacht werden, so hänge man ihnen eine Nulle an (wenn auch Kreuzer gegeben sind, so setze man die Anzahl der in diesen enthaltenen Sechser an die Stelle der Nulle) und dividire durch 3 und 9; d. i. man mache die Gulden zu Sechsern, und dividire durch 27, weil ja 27 Sechser einen Kronenthaler geben.

548 fl. 30 kr.
5485|1 *)
1828|1
203|

Also 203 Kronenthaler und 24 kr.

*) Wenn man nämlich Sechser mit 3 dividirt, so macht man sie zu Achtzehnern, der Rest sind Sechser; dividirt man die Achtzehner mit 9, so macht man sie zu Kronenthalern, der Rest sind Achtzehner.

§. 138.

Hat man Kronenthaler zu Gulden zu machen, so multiplizire man mit 9 und 3, d. i. mit 27 und schneide Ein Ziffer ab. Der Rest sind Sechser. Man mache nämlich die Kronenthaler zu Sechsern, und letztere zu Gulden.

527 Kronenthaler.

4743

1422|9

Also 1422 fl. 54 kr.

§. 139.

Hat man Reichsthaler à 1 fl. 30 kr. in Conventionsthaler à 2 fl. 24 kr. zu verwandeln, so multiplizire man erstere mit 5 und dividire das Produkt mit 8. Der Rest sind 18 Kreuzerstücke; d. h. man mache die Reichsthaler zu 18 Kreuzerstücken, und dividire diese durch 8, weil der Conventionsthaler 8 Achtzehnkreuzerstücke enthält.

957 Reichsthaler und 80 kr

4789|5 4 Achtzehner und 8 kr.

598 Convthlr. und 1 fl. 38 kr.

§. 140.

Hat man Conventionsthaler in Reichsthaler zu verwandeln, so multiplizire man erstere mit 16, (sind auch Kreuzer gegeben, so verwandle man diese in 9 kr. Stücke und addire sie dazu) und schneide eine Zifferstelle ab; der Rest sind 9 kr. Stücke. Man verwandelt nämlich die Conventionsthaler in 9 kr. Stücke, und dividirt diese mit 10, weil 10 Neunkreuzerstücke einen Reichsthaler geben.

598 Convthlr. und 1 fl. 38 kr.

3588 10 Neuner und 8 kr.

957|8

Also 957 Rthlr. und 1 fl. 20 kr.

§. 141.

Hat man Reichsthaler in Kronenthaler zu verwandeln, so hänge man ersteren eine Nulle an (sind auch Kreuzer gegeben, so setze man die Zahl

der in diesen enthaltenen Neuner an die Stelle der Nulle) und dividire mit 2 und dann mit 9. Das heißt man mache die Reichsthaler zu Neunern, und dividire diese durch 18, weil der Kronenthaler 18 Neuner hat.

675 Rthlr. und 48 kr.

6755|1 *) 5 Neuner und 3 kr.

3377|2

375|

Also 375 Kronenthaler und 48 kr.

*) Wenn man nämlich Neuner mit 2 dividirt, so macht man sie zu Achtzehnern, der Rest sind Neuner; dividirt man die Achtzehner durch 9, so macht man sie zu Kronenthalern, der Rest sind Achtzehner.

§. 142.

Hat man Kronenthaler in Reichsthaler zu verwandeln, so multiplizire man erstere mit 9 und mit 2, d. i. mit 18 und schneide eine Ziffer ab; der Rest sind 9 kr. Stücke. Man macht nämlich die Kronenthaler zu Neunkreuzerstücken, und dividirt diese durch 10, weil 10 Neuner einen Reichsthaler geben.

376 Krthlr.

752

676|8

Also 676 Rthlr. und 72 kr.

§. 143.

Hat man Conventionsthaler zu Kronenthalern zu machen, so subtrahire man von ersteren $\frac{1}{9}$, d. i. man multiplizire sie mit $\frac{8}{9}$, weil ein Conventionsthaler = $\frac{8}{9}$ Kronenthaler. Der Rest sind Neuntel Kronenthaler oder 18 kr. Stücke.

874 Convthlr. und 48 kr.

97 18 kr.

777 Krthlr. und 30 kr.

§. 144.

Hat man Kronenthaler in Conventions-Thaler zu verwandeln, so addire man zu ersteren ihr Achtl, d. i. man multiplizire sie mit $1\frac{1}{8}$, weil 1 Kronenthaler = $1\frac{1}{8}$ Conventionsthaler. Der Rest sind natürlich Achtl Conventionsthaler oder 18 kr. Stücke.

777 Krthlr.	30 kr.
97	18 kr.
874	48 kr.

Also 874 Krthlr. und 48 kr.

Sechstes Hauptstück.

Von den Dezimalbrüchen.

§. 145.

Unter einem Dezimalbruche versteht man einen Bruch, der nur die Zahl 10, oder eine Würde von 10 (ein Produkt, welches entsteht, wenn man 10 zwei-, drei- oder mehrmal mit sich selbst multiplizirt), zum Nenner haben kann; dessen Nenner auch nicht angeschrieben, sondern schon aus dem Zähler erkannt wird. Der Nenner hat nämlich so viele Nullen mit voranstehender Einheit als der Zähler Zifferstellen hat; man muß also auch den Zähler mit so vielen Zifferstellen schreiben, als der Nenner Nullen hat. (Man kann 3 sehr leicht mit 5 Zifferstellen schreiben; denn 00003 = 3) Damit man den Dezimalbruch von einer gewöhnlichen Zahl unterscheiden kann, setzt man immer ein Comma vor ihn, welches Dezimalzeichen genannt wird. Vor diesem Dezimalzeichen stehen die Ganzen, oder, wenn keine Ganze gegeben sind, eine Null. $0,075 = \frac{75}{1000}$.

Man sieht, daß die Null vor 75 nur darum gesetzt wurde, damit der Nenner des Bruches erkannt wird. Auch sieht man, daß es sehr leicht ist, Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche zu verwandeln; man darf ihnen nur ihren Nenner geben.

$$0{,}075 = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40}$$

§. 146.

Einem Dezimalbruche kann man am Ende Nullen anhängen so viel man will, ohne daß sein Werth dadurch geändert würde.

$$0{,}55 = 0{,}550000$$

denn $0{,}55 = \frac{55}{100}$; nun aber ist $0{,}550000 = \frac{550000}{1000000}$

$$= \frac{55\cancel{0000}}{100\cancel{0000}}$$

Wenn man nämlich dem Zähler eine Nulle anhängt, erhält der Nenner ebenfalls eine Nulle, weil ja der Nenner so viele Nullen mit voranstehender Einheit haben muß, als der Zähler Zifferstellen hat. Man hat also blos Zähler und Nenner mit 10 multiplizirt, also den Ausdruck des Bruches vergrößert, ohne daß sein Werth geändert wurde. Nicht so ist es, wenn man von vorne Nullen an den Dezimalbruch setzt; denn wenn der Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandelt wird, so bleiben diese werthlos, der Nenner aber behält seine dadurch vermehrte Nullenzahl unverändert.

$$0{,}78 > 0{,}0078$$

Denn $0{,}78 = \frac{78}{100}$; dagegen ist $0{,}0078 = \frac{0078}{10000}$ $= \frac{78}{10000}$.

§. 147.

Will man einen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandeln, so dividire man mit dem Nenner des ersteren in seinen Zähler. Geht dieß nicht an, so setzt man, wenn keine Ganze mit dem Bruche verbunden waren, eine Nulle, und hinter diese das Dezimalzeichen. Nun hängt man dem

Zähler eine Nulle an, und dividirt mit dem Nenner, so erhält man die erste Dezimalstelle. Hebt sich die Division nicht, so setzt man an den Rest abermals eine Nulle, und dividirt mit dem Nenner, wodurch man die zweite Dezimalstelle erhält. Hebt sich die Division wieder nicht, so setzt man an den Rest wiederum eine Nulle, und verfährt wie vorher u. s. w.

$\frac{4}{5} = 0{,}8$	$3\frac{1}{2} = 3{,}5$
$\frac{3}{4} = 0{,}75$	$7\frac{1}{4} = 7{,}25$
$\frac{1}{25} = 0{,}04$	$3\frac{1}{20} = 3{,}05$
$\frac{1}{8} = 0{,}125$	$7\frac{5}{8} = 7{,}625$

Denn $\frac{4}{5} = \frac{40}{50} = \frac{8}{10}$; eben so $\frac{3}{4} = \frac{300}{400} = \frac{75}{100}$; man multiplizirt nämlich Zähler und Nenner so lange mit 10, bis sich endlich Zähler und Nenner ohne Rest durch den vorigen Nenner dividiren lassen, wodurch man zum Nenner eine Würde von 10 erhält.

*Wenn sich bei diesen Verwandlungen der gemeinen Brüche in Dezimalbrüche die Division aufgehoben hat, wie in den vorstehenden Beispielen, so nennt man die auf diese Art entstandenen Dezimalbrüche endliche; hat sich aber die Division nicht aufgehoben, so nennt man die entstandenen Dezimalbrüche unendliche.

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ \ldots$$
$$\frac{5}{6} = 0{,}833\ \ldots$$
$$\frac{2}{7} = 0{,}285714285714\ \ldots$$

0,333 .. 0,833 .. und 0,285714285714 .. sind unendliche Dezimalbrüche.

§. 148.

Hat man Dezimalbrüche zu addiren, so schreibe man sie so unter einander, daß die Ganzen wie bei einer gewöhnlichen Addition, und Dezimalzeichen unter Dezimalzeichen zu stehen kommen; die Dezimalen selbst aber schreibe man nicht wie gewöhnlich von der Rechten zur Linken, sondern von der Linken zur Rechten unter einander. Endlich addire man wie bei einer gewöhnlichen Addition, und setze

in der Summe das Dezimalzeichen unter jenes der Posten.

$$0{,}8 + 7{,}05 + 16{,}528 + 312{,}837 + 19{,}07 + 24{,}006$$

	b)
0,8	0,800
7,05	7,050
16,528	16,528
312,837	312,837
19,07	19,070
24,006	24,006
380,291	380,291

Denn wenn man die gegebenen Dezimalbrüche gleichnamig machen will, so braucht man denen, welche weniger als drei Dezimalstellen haben, blos eine oder zwei Nullen anzuhängen wie in dem Ansatze b), wodurch nach §. 146. der Werth der Dezimalbrüche unverändert bleibt. Nach § 37. werden gleichnamige Brüche addirt, wenn man ihre Zähler addirt, und den gemeinschaftlichen Nenner unverändert unter die Summe der Zähler setzt. Dadurch erhält man nun den unächten Bruch $\frac{2291}{1000}$ oder $2\frac{291}{1000}$. Man hat also im obigen Beispiele blos $\frac{291}{1000}$ als Dezimalbruch angeschrieben, und die 2 Ganzen zu den schon gegebenen Ganzen addirt.

§. 149.

Hat man Dezimalbrüche zu subtrahiren, so schreibe man sie eben so unter einander, wie dieß bei der Addition vorgeschrieben wurde. Nun subtrahire man nach den gewöhnlichen Regeln der Subtraktion, und denke sich, wenn allenfalls der Minuend weniger Dezimalstellen hat als der Subtrahend, an den ersteren so viele Nullen, daß die Anzahl der Dezimalstellen im Minuend und Subtrahend gleich ist. Das Dezimalzeichen setze man in der Differenz genau unter jenes des Subtrahend.

$$28{,}08 - 14{,}569843$$

28,08	b) 28,080000
14,569843	14,569843
13,510157	13,510157

Man hat nämlich dadurch, daß man sich an den ersten Dezimalbruch 4 Nullen gedacht hat, wie dieß im Ansatze b) wirklich geschehen ist, und wodurch nach §. 146. der Werth des Bruches unverändert blieb, beide Brüche gleichnamig gemacht. Nach §. 40. werden gleichnamige Brüche subtrahirt, wenn man blos ihre Zähler subtrahirt, und unter den so erhaltenen Rest ihren gemeinschaftlichen Nenner unverändert setzt. Da man nun $\frac{569843}{1000000}$ von $\frac{80000}{1000000}$ nicht subtrahiren konnte, so hat man von den Ganzen des Minuend nach §. 42. ein Ganzes entlehnt, selbes in $\frac{1000000}{1000000}$ zerlegt, und diese zu den schon vorhandenen $\frac{80000}{1000000}$ addirt. Nun hat man von $\frac{1080000}{1000000}$ die $\frac{569843}{1000000}$ subtrahirt, und als Rest $\frac{510157}{1000000}$ erhalten. Man hat also nichts gethan als $\frac{510157}{1000000}$ als Dezimalbruch angeschrieben, und dann von den noch vorhandenen 27 Ganzen die 14 Ganzen auf die gewöhnliche Art subtrahirt.

§. 150.

Hat man Dezimalbrüche zu multipliziren, so multiplizire man die beiden Faktoren wie gewöhnliche Zahlen, ohne auf das Dezimalzeichen zu achten, und schneide im Produkte von der Rechten zur Linken so viele Dezimalstellen ab, als die beiden Faktoren mit einander haben.

a) 53,478 X 8,64

```
 53478
   864
------
 213912
320868
427824
---------
462,04992
```

Also 53,478 X 8,64 = 462,04992

Denn $53{,}478 \times 8{,}64 = 53\frac{478}{1000} \times 8\frac{64}{100} = \frac{53478}{1000} \times \frac{864}{100} = \frac{46204992}{100000} = 462\frac{4992}{100000}$.

Man hat also blos $462\frac{4992}{100000}$ als Dezimalbruch angeschrieben.

b) $8{,}75 \times 7$

$$\begin{array}{r} 875 \\ 7 \\ \hline 61{,}25 \end{array}$$

Denn $8{,}75 \times 7 = 8\frac{75}{100} \times 7 = \frac{875}{100} \times 7 = \frac{6125}{100} = 61\frac{25}{100}$

c) $43{,}6 \times 0{,}00008$

$$\begin{array}{r} 436 \\ 8 \\ \hline 0{,}003488 \end{array}$$

Hier soll man 6 Dezimalstellen abschneiden, und hat nur 4 erhalten. Man muß also 2 Nullen vorne daran setzen (nicht hinten; denn hinten haben sie keinen Werth), und den Mangel der Ganzen noch überdieß durch eine Nulle anzeigen

Denn $43{,}6 \times 0{,}00008 = 43\frac{6}{10} \times \frac{8}{100000} = \frac{436}{10} \times \frac{8}{100000} = \frac{3488}{1000000}$.

d) Wenn Nullen am Ende des Produktes erscheinen, welche bei Dezimalbrüchen an dieser Stelle keinen Werth haben, so dürfen selbe erst dann weggelassen werden, wenn der Dezimalstrich an seine gehörige Stelle gesetzt ist.

$8{,}85 \times 4$

$$\begin{array}{r} 885 \\ 4 \\ \hline 35{,}40 = 35{,}4 \end{array}$$

§. 151.

Bei der Division der Dezimalbrüche können drei Fälle vorkommen:

a) Hat der Divisor so viele Dezimalstellen als der Dividend, so dividire man wie bei ganzen Zahlen, ohne auf das Dezimalzeichen

zu achten, und der Quotient gibt lauter Ganze. Geht die Division nicht auf, so hänge man eine Nulle an, und setze zugleich im Quotienten das Dezimalzeichen. Hierauf dividire man wie gewöhnlich. Geht die Division wieder nicht auf, so hänge man noch eine Nulle an, und dividire wie vorher u. s. f. Auf diese Art wird man im Quotienten so viele Dezimalen erhalten, als man dem Reste Nullen angehängt hat.

$$9{,}75 : 3{,}25 = 3$$

Denn $9{,}75 : 3{,}25 = \frac{975}{100} : \frac{325}{100}$
$= \frac{975}{\cancel{100}} \times \frac{\cancel{100}}{325} = \frac{975}{325} = 3$

Oder: $8{,}734 : 2{,}183$

$8734 : 2183 = 4{,}00091$
20000
3530

Denn $8{,}734 : 2{,}183 = 8\frac{734}{1000} : 2\frac{183}{1000} = \frac{8734}{1000} :$
$\frac{2183}{1000} = \frac{8734}{\cancel{1000}} \times \frac{\cancel{1000}}{2183} = \frac{8734}{2183} = 4\frac{2}{2183}$

Der Bruch $\frac{2}{2183}$ wurde nun blos nach §. 147. in einen Dezimalbruch verwandelt.

b) **Hat der Dividend weniger Dezimalstellen als der Divisor**, so hänge man ersterem so viele Nullen an, daß die Anzahl der Dezimalstellen des Dividend und des Divisors gleich werde. Dadurch hat man nach §. 146. den Werth des Dividend nicht geändert, und den Rechnungsfall auf a zurückgeführt.

$$5 : 0{,}25 = 5{,}00 : 0{,}25 = 500 : 25 = 20$$

c) **Hat der Divisor weniger Dezimalstellen als der Dividend**, so dividire man wie bei ganzen Zahlen, ohne auf den Dezimalstrich zu achten. Da nun nach §. 27. der Dividend dem Produkte des Divisors und des Quotienten gleich werden muß, so müssen nach §. 150. der

Divisor und der Quotient zusammen so viele Dezimalstellen haben, als der Dividend allein hat. Man schneidet daher im Quotienten von der Rechten zur Linken so viele Dezimalstellen ab, als der Dividend mehr hat, denn der Divisor. Hat sich nun überdieß die Division nicht aufgehoben, so setze man an den Rest eine Nulle, dividire, und erhält so eine weitere Dezimalstelle. Auf diese Art kann man fortfahren zu dividiren, bis sich entweder die Division aufhebt, oder so viele Dezimalstellen gefunden sind, daß nur ein unbedeutender Fehler begangen wird, wenn man die Division als vollendet betrachtet. Denn wenn man nur 5 Dezimalstellen gefunden hat, so fehlt man, wenn man da die Division aufgibt, schon nicht mehr um $\frac{1}{100000}$.*

*In allen Fällen, wo man an die Dezimalbrüche hinten Nullen zu setzen oder zu denken hat, setzt und denkt man bei unendlichen Dezimalbrüchen eben jene Ziffern, welche, aus den vorausgehenden Ziffern zu schließen, folgen würden. So wird man an 0,333 nie eine Nulle setzen, sondern lauter Dreier.

$$873{,}564025 : 2{,}5 = 349{,}42561$$

Denn $873{,}564025 : 2{,}5 = 873\,\frac{564025}{1000000} : 2\,\frac{5}{10}$

$$= \frac{873564025}{1000000} : \frac{25}{10} = \frac{873564025}{1000000} \times \frac{10}{25} = \frac{873564025}{2500000}$$

$$= \frac{34942561}{100000} = 349\,\frac{42561}{100000}.$$

Oder $8{,}734286 : 2424{,}2$

$$\begin{array}{l} 8734286 : 24242 = 0{,}00360 \\ \underline{146168} \\ 7166 \end{array}$$

Man mußte hier 2 Nullen vor den Quotienten setzen; denn man hat 5 Zifferstellen abzuschneiden, und der Quotient besteht nur aus 3 Zifferstellen. Zu dem Reste 7166 kann man weiter Nullen setzen, und mehr Dezimalstellen suchen.

Denn $8{,}734286 : 2424{,}2 = \frac{8734286}{1000000}$:

$$\frac{24242}{10} = \frac{8734286}{1000000} \times \frac{10}{24242} = \frac{8734286}{2424200000}$$

Nun hat man also blos den zuletzt stehenden gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt.

Siebentes Hauptstück.

Von der Buchstabenrechnung.

§. 152.

Jeder Buchstabe des Alphabets kann jede Größe bezeichnen. So kann uns a oder auch b oder sonst ein Buchstabe 5 Männer oder 7 fl. oder 3000 Pferde oder sonst eine Größe gelten. Dabei ist jedoch zu merken, daß man ohne Noth nicht leicht andere als lateinische Buchstaben wählt; daß die ersten Buchstaben gewöhnlich statt bekannter Größen, die letzten x, y und z gewöhnlich statt unbekannter Größen gesetzt werden; daß endlich jeder Buchstabe in einer und derselben Aufgabe immer eine und dieselbe Bedeutung behält.

Vor jedem Buchstaben steht eine Zahl, und wenn keine davor steht, so hat man sich die Zahl 1 hinzuzudenken. Diese Zahl nennt man den Coefficienten. Der Coefficient zeigt an, wie oft die hinter ihm stehende Buchstabengröße zu nehmen sey. Wenn also a gleich 4 fl. ist, so ist 3a = 3mal 4 fl. oder = 12 fl.

Hinter jedem Buchstaben ober der Linie steht auch eine Größe (bald selbst ein Buchstabe, bald eine Zahl), und wenn keine Größe da zu finden ist, so hat man sich die Zahl 1 hinzuzudenken. Diese Größe nennt man den Exponenten. Der Exponent zeigt an, wie oft die unmittelbar vor ihm stehende Größe (sey

dies (ein Buchstabe oder eine Zahl) als Faktor zu setzen, d. i. mit sich selbst zu multipliziren sey. Wenn also $a = 4$, so ist

$$a^2 = a \times a = 4 \times 4 = 16;$$
$$a^3 = a \times a \times a = 4 \times 4 \times 4 = 64$$
$$a^4 = a \times a \times a \times a = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$$

u. s. f.

a^2 wird nun gelesen a der zweiten (Würde) oder a secundae (potentiae)

a^3 wird gelesen a der dritten (Würde) oder a tertiae (potentiae)

a^4 wird gelesen a der vierten (Würde) oder a quartae (potentiae). Man läßt die Worte: Würde, potentiae gewöhnlich weg, und sagt blos der 5ten (quintae), der 6ten (sextae), der 7ten (septimae), der 8ten (octavae) u. s. f.

Man versteht also unter einer Würde, Dignität oder Potenz von a (oder sonst einer Größe) das Produkt, welches man erhält, wenn man die Größe 2, 3, 4, 5mal oder noch öfter als Faktor setzt, d. i. mit sich selbst multiplizirt. Setzt man nämlich a dreimal als Faktor, so erhält man a^3 oder die 3te Würde von a, und umgekehrt ist a von a^3 die dritte Wurzel. Man versteht also unter der 3ten oder überhaupt unter der nten Wurzel von einer Größe a nichts anders als jene Größe, welche 3 oder nmal als Faktor gesetzt, der Größe a gleich ist. 3 oder auch n nennt man den Exponenten der Wurzel. Setzt man a 5mal als Faktor, so erhält man a^5 oder die 5te Würde von a, und umgekehrt ist a von a^5 die 5te Wurzel. Man schreibt 5te Wurzel von a^5 so an: $\sqrt[5]{a^5}$;

4te Wurzel von $a^4 = \sqrt[4]{a^4}$

3te Wurzel von $a^3 = \sqrt[3]{a^3}$

2te Wurzel von $a^2 = \sqrt{a^2}$

Wenn nämlich im Wurzelzeichen keine Größe steht, so denkt man sich immer die Zahl 2 hinein.

Das Wurzelzeichen muß über die Größen, aus denen die Wurzel gezogen werden soll, hinüberreichen $\sqrt[3]{a^2} + b^3$ heißt: man solle b^3 zur dritten Wurzel aus a^2 addiren; $\sqrt[3]{a^2 + b^3}$ heißt: man solle a^2 und b^3 addiren, und aus ihrer Summe die tritte Wurzel ziehen.

Die zweite Würde einer Größe nennt man das Quadrat derselben. a^2 ist die zweite Würde von a, oder das Quadrat von a. So nennt man auch die 2te Wurzel die Quadratwurzel. $\sqrt{a^2}$ heißt Quadratwurzel von a^2. Eben so nennt man die 3te Würde einer Größe den Cubus oder Würfel derselben, und die 3te Wurzel einer Größe ihre Cubikwurzel. Es ist also a^3 der Cubus von a, und $\sqrt[3]{a^3}$ heißt Cubikwurzel aus a^3. Die vierte Würde nennt man das Biquadrat.

Wenn nun $a = 4$ ist, so ist $5a^2 = 5 \times 4 \times 4 = 80$. Sollte der Exponent 2 auch für 5 gelten, so müßte man 5a durch Klammern einschließen, und so schreiben $(5a)^2$. Wenn nun $a = 4$ ist, so ist $(5a)^2 = (5 \cdot 4)^2 = 20^2 = 20 \cdot 20 = 400$.

Wenn mehrere Buchstaben ohne irgend ein Zeichen (gewöhnlich in alphabetischer Ordnung) neben einander stehen, so heißt das: sie sind mit einander multiplizirt.

$$5a^2b^3d = 5.\ a.\ a.\ b.\ b.\ b.\ d.$$

Wenn nun $a = 4$, $b = 2$, $d = 3$ ist, so ist

$$5a^2b^3d = 5.\ 4.\ 4.\ 2.\ 2.\ 2.\ 3 = 1920$$
$$3ab^2 = 3.\ 4.\ 2.\ 2 = 48$$
$$2a^3bd = 2.\ 4.\ 4.\ 4.\ 2.\ 3 = 768$$

Wollte man schreiben, daß $3ab^2$ zur 3ten Würde erhoben sey, so müßte dieß so bezeichnet werden $(3ab^2)^3$. Wollte man schreiben, daß ab^2, nicht aber auch 3 zur dritten Würde zu erheben sey, so müßte man dieß so bezeichnen $3(ab^2)^3$. Wenn nun $a = 2$, $b = 3$ ist, so ist

$$3ab^2 = 3 . 2 . 3 . 3 = 54$$
$$(3ab^2)^3 = 54^3 = 54 . 54 . 54 = 157464$$
$$3(ab^2)^3 = 3(2 . 3 . 3)^3 = 3(18)^3 = 3 . 18 . 18 . 18 = 17496$$

Einen Ausdruck, wie $3a^2bd^3$, nennt man nun eine Buchstabengröße; indessen ist auch $3a^2$ oder a eine Buchstabengröße.

Vor jeder Buchstabengröße steht entweder das Zeichen (+), oder das Zeichen (—). Wenn kein Zeichen davor steht, so hat man sich das Zeichen (+) hinzudenken. Jene Buchstabengrößen nun, welche das Zeichen (+) vor sich haben, nennt man positiv, und sie entsprechen dem, was man im gemeinen Leben Vermögen, Haben, Activa nennt. Eine Buchstabengröße, welche das Zeichen (—) vor sich hat, nennt man negativ, und sie entspricht dem, was man im gemeinen Leben Schulden, Sollen, Passiva nennt.

§. 153.

Buchstabengrößen sind gleichartig, wenn alle Buchstaben mit denselben Exponenten in der einen vorkommen, wie in der andern. (Die Coefficienten dürfen verschieden seyn). $5a^2b^3cd^2$ und $3a^2b^3cd^2$ sind gleichartige Buchstabengrößen. Dagegen sind Buchstabengrößen ungleichartig, wenn dieß nicht der Fall ist. $3a^2b^3cd^2$ und $3a^2b^3cd$ sind ungleichartige Buchstabengrößen, weil d in letzterer nur den Exponenten 1, in der ersteren aber den Exponenten 2 hat. Noch weniger sind $3a^2b^3cd^2$ und $3a^2b^3d^2$ gleichartig.

§. 154.

Gleichartige Buchstabengrößen können addirt werden. Man sehe da zuerst auf die Zeichen. Sind diese gleich, so behalte man in der Summe dasselbe Zeichen, und addire die Coefficienten, lasse aber die Buchstaben unverändert.

$$3a^2b^3c + 4a^2b^3c + 5a^2b^3c = 12a^2b^3c$$
$$- 8a^4b^2d - 5a^4b^2d - 6a^4b^2d = - 19a^4b^2d.$$

Man denke sich eben a^2b^3c bedeute 9 fl. Wer nun $+ 3a^2b^3c$ und $+ 4a^2b^3c$ und $+ 5a^2b^3c$ hat, der hat eben 3mal 9 oder 27 fl. Vermögen, und 4mal 9 oder 36 fl. Vermögen, und 5mal 9 oder 45 fl. Vermögen, im Ganzen aber 12mal 9 oder 108 fl. Vermögen.

Eben so denke man a^4b^2d bedeute 4 fl. Wer nun $- 8a^4b^2d$ und $- 5a^4b^2d$ und $- 6a^4b^2d$ hat, der hat eben 8mal 4 oder 32 fl. Schulden, und 5mal 4 oder 20 fl. Schulden, und 6mal 4 oder 24 fl. Schulden, im Ganzen also 19mal 4 oder 76 fl. Schulden.

Haben die zu addirenden gleichartigen Buchstabengrößen verschiedene Zeichen, so subtrahire man den kleineren Coefficienten vom größeren, und behalte das Zeichen des größeren bei, lasse aber die Buchstaben selbst mit ihren Exponenten ganz unverändert.

$$5a^4b^2c - 3a^4b^2c = 2a^4b^2c$$
$$4a^4b^2c - 7a^4b^2c = - 3a^4b^2c$$
$$5a^4b^2c - 5a^4b^2c = 0$$

Man denke sich nämlich in diesen Beispielen, a^4b^2c bedeute 8 fl. Wer nun $5a^4b^2c$ und $- 3a^4b^2c$ hat, der hat eben 5mal 8 oder 40 fl. Vermögen und 3mal 8 oder 24 fl. Schulden, folglich 2mal 8 oder 16 fl. reines Vermögen.

Wer $4a^4b^2c$ und $- 7a^4b^2c$ hat, besitzt eben 4mal 8 oder 32 fl. Vermögen und 7mal 8 oder 56 fl. Schulden; hat also rein 3mal 8 oder 24 fl. Schulden.

Wer $5a^4b^2c$ und $- 5a^4b^2c$ hat, besitzt eben 5mal 8 oder 40 fl. Vermögen und 5mal 8 oder 40 fl. Schulden, im Ganzen also 0 oder Nichts.

§. 155.

Kommen mehrere gleichartige Buchstabengrößen vor, von denen einige das Zeichen (+), andere das Zeichen (—) haben, so addire man zuerst alle, die gleiches Zeichen haben, dann die beiden Summen.

$$5a^2b + 3a^2b - 4a^2b + 2a^2b - 8a^2b + a^2b - 6a^2b$$
$$5a^2b + 3a^2b + 2a^2b + a^2b = 11a^2b$$
$$-4a^2b - 8a^2b - 6a^2b = -18a^2b$$
$$-7a^2b$$

*Ungleichartige Buchstabengrößen können gar nicht addirt werden; diese setzt man eben mit ihren Zeichen in eine Reihe.

§. 156.

Kommen mehrere Buchstabengrößen vor, wovon einige unter sich, aber nicht mit den übrigen gleichartig sind, so setze man die gleichartigen mit ihren Zeichen unter einander, und addire sie nach §. 154. und 155. und setze die so erhaltenen Summen mit ihren Zeichen neben einander.

$$5a^2b - 3a^4b + 2ab - 6a^2b + 8ab - 9a^4b + 9c^2 - 13ab$$
$$5a^2b - 3a^4b + 2ab + 9c^2$$
$$-6a^2b - 9a^4b + 8ab$$
$$-13ab$$
$$-a^2b - 12a^4b - 3ab + 9c^2$$

Da man die positiven Größen gerne vornehin setzt
$9c^2 - a^2b - 12a^4b - 3ab$

§. 157.

Gleichartige Buchstabengrößen lassen sich subtrahiren. Man hat da weiter nichts zu thun als im Subtrahend das Zeichen zu ändern (aus dem — ein + und aus dem + ein — zu machen), und den so veränderten Subtrahend nach §. 154. zum Minuend zu addiren.

Wenn also von $3a^2bc$ die Größe a^2bc subtrahirt werden soll, so ist das eben so viel als wenn man $3a^2bc$ und $-a^2bc$ addiren sollte. Man erhält also $2a^2bc$.

Wenn man von $3a^2bc$ die Größe $-a^2bc$ subtrahiren soll, so ist das eben so viel, als wenn man zu $3a^2bc$ die Größe a^2bc addiren sollte; man erhält $4a^2bc$.

Denn addirt man in den beiden vorhergegangenen Beispielen die erhaltenen Differenzen zu den Subtrahenden nach §. 154., so erscheinen die Minuenden. Die Subtraktionen müssen daher richtig seyn, nach §. 18. Es ist nämlich:

$$2a^2bc \text{ und } + a^2bc = 3a^2bc$$
$$4a^2bc \text{ und } - a^2bc = 3a^2bc$$

§. 158.

Besteht der Subtrahend aus mehreren Gliedern, so werden alle diese Glieder eingeklammert, und vor die erste Klammer wird dann das Zeichen der Subtraktion gesetzt. Nun kann man die einzelnen Glieder des Subtrahend unter die gleichartigen Glieder des Minuend setzen, und die Subtraktion nach §. 157. vornehmen. Die Differenz kann nun ohne Klammern in eine Reihe geschrieben werden, in welche mit dem veränderten Zeichen auch jene Glieder des Subtrahend zu setzen sind, mit denen eben kein Glied des Minuend gleichartig war. Ueberhaupt muß man, wenn der Subtrahend dem Minuend ohne Klammern angereiht werden soll, es ja nie vergessen, im Subtrahend alle Zeichen zu ändern.

$$(5a^2bc^3 - 3ab^2 + a^4b^2 - 3ac) - (4a^2bc^3 - 5a^4b^2 + 3ab^2 + d)$$

$$\begin{array}{rrrrr} 5a^2bc^3 & - 3ab^2 & + a^4b^2 & - 3ac & \\ 4a^2bc^3 & + 3ab^2 & - 5a^4b^2 & & + d \\ - & - & + & & - \\ \hline a^2bc^3 & - 6ab^2 & + 6a^4b^2 & - 3ac & - d \end{array}$$

§. 159.

Bei der Multiplikation der Buchstabengrößen sehe man vor allen Dingen auf die Zeichen, und beachte da die Regel: gleiche Zeichen geben +, ungleiche Zeichen geben — im Produkte. Wenn also beide Faktoren das Zeichen + oder beide das Zeichen — haben, so setzt man zum Produkte das Zeichen +; hat aber einer der Faktoren das Zeichen +, der andere das Zeichen —, so setzt man zum Produkte das Zeichen —.

Hierauf sehe man auf die Coefficienten. Diese werden in allen Fällen mit einander multiplizirt.

Endlich sehe man auf die hinter den Coefficienten stehenden Buchstaben. Da schreibe man alle Buchstaben, welche in beiden Faktoren vorkommen, mit ihren Exponenten, ohne irgend ein Zeichen dazwischen zu machen, in alphabetischer Ordnung hinter einander. Käme Ein Buchstabe öfter vor, so setze man ihn nur einmal, und addire seine Exponenten.

1) $3a^2bc^2 \times 5a^2b^2d = 15a^4b^3c^2d$

2) $-4ab^2c \times -3ab^2 = 12a^2b^4c$

3) $-7a^2c^2 \times 3a^4d = -21a^6c^2d$

Es sey in den vorstehenden Beispielen $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$

ad 1) $3a^2bc^2$ ist ein Produkt aus 3. a. a. b. c. c., eben so ist $5a^2b^2d$ ein Produkt aus 5. a. a. b. b. d. Nun multiplizirt man aber nach § 53. mit einem Produkte, wenn man mit den Faktoren dieses Produktes multiplizirt. Folglich ist $3a^2bc^2 \times 5a^2b^2d = 3.$ a. a. b. c. c. 5. a. a. b. b. d. Nun ist aber 3. 5. = 15; a. a. a. a. nach §. 152. $= a^4$; b. b. b (§. 152.) $= b^3$; c. c. (§. 152.) $= c^2$; $d = d$; also 3. a. a. b. c. c. 5. a. a. b. b. d $= 15a^4b^3c^2d$.

Auch ist nach dem oben angenommenen Werthe der Buchstaben:

$3a^2bc^2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 576$

$5a^2b^2d = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 900$

Also $3a^2bc^2 \times 5a^2b^2d = 576 \times 900 = 518400$

Es ist aber auch $15a^4b^3c^2d = 15 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 = 518400$

ad 2) $4ab^2c = 4 \cdot 2 \cdot 3 \; 3 \cdot 4 = 288$; also $-4ab^2c = 288$ (etwa Thaler) Schulden.

$3ab^2 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ (als Multiplikator eine unbenannte Zahl).

Wenn man macht, daß Jemand einen Schuldposten von 288 Thalern 54mal **nicht** hat (288 Thaler Schulden mit — 54 multiplizirt), so ist dieß eben so viel als wenn man ihm 54mal 288 Thaler geschenkt

hätte, denn er kann ja 4mal 288 Thaler, die er von seinem schon erworbenen oder erst zu erwerbenden Vermögen Andern geben müßte, für sich als reines Vermögen behalten. Auch ist $12a^2b^4c = 12 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 3 . 4 = 15552$ so wie 54mal 288 gleich 15552 ist.

ad 3) $7a^2c^2 = 7 . 2 . 2 . 4 . 4 = 448$

$3a^4d = 3 . 2 . 2 . 2 . 2 . 5 = 240$

$-7a^2c^2 \times 3a^4d$ ist also $= 448$ (etwa Thaler Schulden) $\times 240$.

Wenn Jemand 240mal 448 Thaler Schulden hat, so hat er eben 107520 Thaler Schulden, wie denn auch $-21a^6c^2d = -21 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 4 . 4 . 5 = -107520$.

§. 160.

Hat man einen mehrgliederigen Multiplikand und einen eingliederigen Multiplikator, so multiplizire man jedes Glied des ersteren mit dem Multiplikator nach §. 159.

$$(5a^2c - 3ab^2 \times 2a^2cd - 5ac) \times 2a^2cd$$

Hätte man die vier Glieder des Multiplikand nicht eingeklammert, so würde blos $-5ac$ mit $2a^2cd$ zu multipliziren seyn. Da der Multiplikand eingeklammert ist, kann man das Multiplikationszeichen auch weglassen, und so schreiben:

$$\frac{(5a^2c - 3ab^2 + 2a^2cd - 5ac)\ 2a^2cd}{10a^4c^2d - 6a^3b^2cd + 4a^4c^2d^2 - 10a^3c^2d}$$

§. 161.

Sind beide Faktoren mehrgliederig, so multiplizire man den Multiplikand mit jedem Gliede des Multiplikators nach §. 160., und addire dann die gleichartigen Buchstabengrößen.

$$(3a^2b - 2ab^2)\ (5ab^2 - 2a^2b)$$

Hätte man nicht die 2 Glieder des Multiplikators eingeklammert, so würde der Multiplikand blos mit

$5ab^2$ zu multipliziren, und $-2a^2b$ zum Produkte zu addiren seyn.

$$
\begin{array}{l}
(3a^2b-2ab^2)\ (5ab^2-2a^2b) \\
\hline
15a^3b^3-10a^2b^4 \\
\qquad -6a^4b^2+4a^3b^3 \\
\hline
19a^3b^3-10a^2b^4-6a^4b^2
\end{array}
$$

§. 162.

Bei der Division der Buchstabengrößen sehe man vor allen Dingen auf die Zeichen, und beachte folgende Regel: gleiche Zeichen geben für den Quotienten das Zeichen +, ungleiche Zeichen geben —. Wenn nämlich Dividend und Divisor beide das Zeichen + oder beide das Zeichen — haben, so erhält der Quotient das Zeichen +; hat aber der Dividend oder der Divisor, gleichviel welcher, das Zeichen —, so setzt man vor den Quotienten das Zeichen —.

Hierauf dividire man den Coefficienten des Dividend durch den Coefficienten des Divisors, oder schreibe, wenn der Quotient keine ganze Zahl würde, die Division als Bruch an.

Endlich sehe man auf die Buchstaben. Alle Buchstaben des Dividend, welche nicht auch im Divisor vorkommen, setze man mit ihren Exponenten unverändert hinter den Coefficienten des Quotienten. Kommt ein Buchstabe im Divisor und im Dividend vor, so setze man ihn auch in den Quotienten, und gebe ihm zum Exponenten die Differenz, welche man erhält, wenn der Exponent dieses Buchstabens im Divisor von dem Exponenten dieses Buchstabens im Dividend subtrahirt wird. Alle Buchstaben des Divisors endlich, welche im Dividend gar nicht vorkommen (wenn dergleichen da sind) setze man unter den bereits erhaltenen Quotienten als Nenner.

1) $8a^4b^3d : 4ab^2 = 2a^3bd$

2) $-8a^4b^3d : -4ab^2 = 2a^3bd$

3) $-8a^4b^3d : 4ab^2 = -2a^3bd$

4) $8a^4b^3d : -4ab^2 = -2a^3bd$

$$5)\ 8a^4b^3d : 4ab^2c = \frac{2a^3bd}{c}$$

$$6)\ 8a^4b^3d : 5ab^2c = \frac{8a^3bd}{5c}$$

Denn wenn man nach §. 159. die einzelnen Quotienten mit den Divisoren multiplizirt, erscheinen als Produkte die Dividenden; folglich müssen die Divisionen richtig seyn. (§. 27.) Es ist nämlich

ad 1) $2a^3bd \times 4ab^2 = 8a^4b^3d$

ad 2) $2a^3bd \times -4ab^2 = -8a^4b^3d$

ad 3) $-2a^3bd \times 4ab^2 = -8a^4b^3d$

ad 4) $-2a^3bd \times -4ab^2 = 8a^4b^3d$

ad 5) $\frac{2a^3bd}{c} \times 4ab^2c = \frac{8a^4b^3cd}{c} = 8a^4b^3d$

(Letzteres nach 1, 2, 3, 4, deren Richtigkeit bereits erwiesen ist).

ad 6) $\frac{8a^3bd}{5c} \times 5ab^2c = \frac{40a^4b^3cd}{5c} = 8a^4b^3d$

(Letzteres nach 1, 2, 3, 4, deren Richtigkeit bereits erwiesen ist).

§. 163.

Ist der Dividend mehrgliederig, der Divisor aber nur eingliederig, so dividire man jedes Glied des Dividend nach §. 162. durch den Divisor.

$$(8a^4b^2 - 6a^3b^4 + 10a^4b^4 - 5a^5) : 2a^2b^3$$
$$= 4a^2b^{-1*} - 3ab + 5a^2b - \frac{5a^3}{2b^3} \quad (*§. 157.)$$

§. 164.

Sind der Dividend und der Divisor beide mehrgliederig, so dividire man nach den gegebenen Regeln mit dem ersten Gliede des letzteren in das erste Glied des ersteren, multiplizire mit dem erhaltenen Quotienten den ganzen Divisor, subtrahire dieses Pro-

dukt vom Dividend, setze zum Reste den noch übrigen Theil des Dividend herab, und fahre so fort, bis die Division aufgeht, oder eine unendliche Reihe als Quotient erscheint.

$$(a^3 + b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2$$

$$\begin{array}{l}
a^3 + a^2b \\
- \quad - \\
\hline
\quad - a^2b + b^3 \\
\quad - a^2b - ab^2 \\
\quad + \quad + \\
\hline
\qquad + ab^2 + b^3 \\
\qquad + ab^2 + b^3 \\
\qquad - \quad - \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Denn wenn man $(a^2 - ab + b^2)$ mit $(a + b)$ multiplizirt, so erscheint der Dividend; die Division muß also richtig seyn (nach §. 27.)

§. 165.

Jede Größe, welche den Exponenten 0 hat, ist $= 1$.

$$d^0 = 1$$

$$\text{Denn } d^0 = d^{m-m} = d^m : d^m = \frac{d^m}{d^m} = 1$$

§. 166.

Jede Größe mit einem negativen Exponenten ist gleich einem Bruche, der zum Zähler 1 und zum Nenner dieselbe Größe aber mit positivem Exponenten hat.

$$d^{-m} = \frac{1}{d^m}$$

$$\text{Denn } d^{-m} = d^{m-2m} = d^m : d^{2m} = \frac{d^m}{d^{2m}} = \frac{1}{d^m} \text{ §.35.}$$

§. 167.

Eine Potenz wird zu einer verlangten Dignität erhoben, wenn man den Exponenten der Potenz mit dem der verlangten Dignität multiplizirt. $(a^2)^3 = a^6$

Denn $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^6$

*Umgekehrt wird aus einer Potenz eine verlangte Wurzel ausgezogen, wenn man den Exponenten der Potenz durch jenen der verlangten Wurzel dividirt. $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

Es läßt sich daher jede Wurzelgröße auf den Ausdruck einer Potenz mit einem gebrochenen Exponenten bringen. $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{3}{5}}$. Nun lassen sich dergleichen gebrochene Exponenten gleichnamig machen wie $a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{10}{15}} + a^{\frac{9}{15}}$ und dann kann man die Potenzen wieder in Wurzelgrößen verwandeln, wodurch man nun $\sqrt[15]{a^{10}} + \sqrt[15]{a^9}$ erhält. Man sagt nun die Wurzelgrößen seyen gleichnamig gemacht worden. Sind die Wurzelexponenten gleich, und die Größen hinter dem Wurzelzeichen ebenfalls einander gleich, so nennt man die Wurzelgrößen gleichartig.

§. 168.

Eine Wurzelgröße wird zu einer verlangten Dignität erhoben, wenn man die Größe hinter dem Wurzelzeichen zur verlangten Dignität erhebt.

$$(\sqrt[3]{a^6})^2 = \sqrt[3]{a^{12}}$$

Denn $(\sqrt[3]{a^6})^2 = (a^{\frac{6}{3}})^2 = a^{\frac{12}{3}} = \sqrt[3]{a^{12}}$

§. 169.

Aus einer Wurzelgröße wird eine beliebige Wurzel ausgezogen, wenn man die beiden Wurzelexponenten mit einander multiplizirt.

$$\sqrt[3]{(\sqrt{a^5})} = \sqrt[6]{a^5}$$

Denn $\sqrt[3]{(\sqrt{a^5})} = \sqrt[3]{a^{\frac{5}{2}}} = a^{\frac{5}{2 \cdot 3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$

§. 170.

Gleichartige Wurzelgrößen lassen sich, weil man sie als Potenzen betrachten kann, addiren und subtrahiren wie Potenzen $5\sqrt{a} + 2\sqrt{a} = 7\sqrt{a}$. Gleichnamige Wurzelgrößen werden multiplizirt, wenn man die Größen vor und hinter dem Wurzelzeichen mit einander multiplizirt. $3\sqrt[n]{a} \times 2\sqrt[n]{c} = 6\sqrt[n]{ac}$; denn $3\sqrt[n]{a} \times 2\sqrt[n]{c} = 3a^{\frac{1}{n}} \times 2c^{\frac{1}{n}} = 6\,(ac)^{\frac{1}{n}} = 6\sqrt[n]{ac}$. Sind die Wurzelgrößen ungleichnamig, so mache man sie zuerst gleichnamig. Umgekehrt werden gleichnamige Wurzelgrößen dividirt, wenn man die Größen vor und hinter dem Wurzelzeichen dividirt, ungleichnamige werden zuerst gleichnamig gemacht. $6\sqrt[n]{ac} : 3\sqrt[n]{a} = 2\sqrt[n]{c}$.

Achtes Hauptstück.

Von em Quadrate und der Quadratwurzel vieltheiliger Größen.

§. 171.

Das Quadrat einer 2theiligen Größe $10a + b$ besteht:

1) aus dem Quadrate des ersten Theiles, welches immer in den Hundertern enthalten ist: $100a^2$;
2) aus dem doppelten Produkte beider Theile, welches immer in den Zehnern enthalten ist: $20ab$;
3) aus dem Quadrate des zweiten Theiles, welches immer in den Einern enthalten ist: b^2.

Ist die zweitheilige Größe eine Summe, wie $10a + b$, so sind die drei Glieder des Quadrates positiv. $(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$.

Ist die zweitheilige Größe eine Differenz, wie $10a - b$, so ist das erste und dritte Glied des Quadrates positiv, das zweite negativ. $(10a - b)^2 = 100a^2 - 20ab + b^2$.

Man denke sich die Zahl 12 als eine Summe, z. B. $10 + 2$, und erhebe sie zum Quadrate, so besteht dieses:

$$
\begin{array}{lrl}
1)\ \text{aus}\ 10^2 & = & 100 \\
2)\ \text{aus}\ 10 \times 2 \times 2 & = & 40 \\
3)\ \text{aus}\ 2^2 & = & 4 \\
\hline
\text{Also}\ (10 + 2)^2 & = & 144 = 12 \times 12
\end{array}
$$

Nun denke man sich 12 als eine Differenz, z. B. 20 — 8, und erhebe sie zum Quadrate, so besteht dieses:

$$
\begin{array}{lrl}
1)\ \text{aus}\ 20^2 & = & 400 \\
2)\ \text{aus} -20 \times 8 \times 2 & = & -320 \\
3)\ \text{aus}\ 8^2 & = & 64 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\text{Also}\ (20 - 8)^2 = 400 + 64 - 320 = 144 = 12 \times 12$$

§. 172.

Hat man aus einer gegebenen Größe die Quadratwurzel auszuziehen, so bedenke man daß $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$.

Hierauf theile man die gegebene Größe (Zahl) von der Rechten zur Linken in Klassen von zwei zu zwei Zifferstellen. (Die höchste Klasse kann auch nur Eine Ziffer haben).

Unter die Ziffern der höchsten Klasse setze man nun jenes Quadrat der ersten 9 Zahlen, welches der durch genannte Ziffern bezeichneten Zahl entweder gleich oder nur um weniges kleiner ist. Die Quadratwurzel dieses Quadrates betrachte man als den ersten Theil der gesuchten Wurzel.

Nun subtrahire man das oben bezeichnete Quadrat einer der ersten 9 Zahlen von den darüber stehenden Ziffern, weil ja in diesen, die man in Beziehung auf die beiden Ziffern der folgenden Klasse als die Hunderter betrachtet, a^2 enthalten ist, und setze zum allenfallsigen Reste die zunächst folgende Klasse herab.

Da in den Zehnern dieser Klasse $2ab$ enthalten, a aber bereits bekannt ist, so braucht man nur den für a gefundenen Werth mit 2 zu multipliziren, und damit, also mit $2a$ in $2ab$, d. i. in die erwähnten Zehner zu dividiren, so erhält man b, oder den zweiten Theil der gesuchten Wurzel.

Mit dem für b gefundenen Werthe multiplizire man den für 2a gefundenen Werth, so erhält man den Werth für 2ab, welcher von den Zehnern wegzunehmen ist, während das Quadrat des Werthes von b, also b^2 von den Einern subtrahirt werden muß. Sollte dieses nicht angehen, so hat man für b einen zu großen Werth angenommen.

Zum allenfalls erhaltenen Reste setze man (wenn noch eine Klasse da ist) die nächstfolgende Klasse, nehme an, daß in den Zehnern der letzteren 2ab enthalten sey, nachdem man zuerst die bereits gefundenen beiden Ziffern der gesuchten Wurzel als einen Werth für a betrachtet hat, und verfahre weiter wie vorher.

$\sqrt{23|65|84|96} = 4864$

$a^2 \quad 16$

$2ab + b^2 <$ oder $= 765$

$2a = 8$

$2ab = 64$

$b^2 = 64$

$2ab + b^2 = 704$ Hier ist $2ab + b^2 < 765$

$2ab + b^2 <$ oder $= 6184$

$2a = 96$

$2ab = 576$

$b^2 = 36$

$2ab + b^2 = 5796$ hier ist $2ab + b^2 < 6184$

$2ab + b^2 <$ oder $= 38896$

$2a = 972$

$2ab = 3888$

$b^2 = 16$

$2ab + b^2 = 38896$ hier ist $2ab + b^2 = 38896$

Obiges Verfahren vereinfacht.

$$\sqrt{23|65|84|96} = 4864$$

```
 16
 ---
 765
 88
 704
 ----
 6184
 966
 5796
 -----
 38896
 9724
 38896
 -----
     0
```

§. 173.

Soll die Quadratwurzel aus einer gemischten Zahl gezogen werden, so verwandle man den dabei stehenden Bruch vor allen Dingen in einen Dezimalbruch, und setze an denselben eine Nulle, (oder wenn es ein unendlicher Dezimalbruch ist, die eben treffende Ziffer) falls die Anzahl der Dezimalstellen ungerade seyn sollte, weil im Quadrate einer jeden gemischten Zahl die Anzahl der Dezimalstellen gerade seyn muß. Denn da nach §. 150. bei der Multiplikation der Dezimalen das Produkt so viele Dezimalstellen haben muß, als die beiden Faktoren mit einander haben, also im Quadrat zweimal so viele Dezimalstellen vorkommen müssen als in der Wurzel, so ist 1) die Anzahl der Dezimalstellen des Quadrates einer gemischten Zahl immer ein Produkt von 2, folglich immer eine gerade Zahl; 2) hat die Wurzel immer halb so viele Dezimalstellen als das Quadrat, man erhält also in der Wurzel immer so viele Dezimalstellen, als das Quadrat Klassen von zwei Dezimalstellen hat. Man braucht daher nichts zu thun, als in der Wurzel das Dezimalzeichen zu setzen, sobald man die erste Klasse der Dezimalen herabsetzt.

$\sqrt{8|06{,}56} = 28{,}4$

4

406

48

384

2256

564

2256

0

§. 174.

Bleibt bei der Ausziehung einer Quadratwurzel von der letzten Klasse des Quadrates noch ein Rest, so hänge man an diesen, bis die Wurzel rein oder doch ziemlich nahe gefunden ist, Klassen von je zwei Nullen an, setze zugleich in der Wurzel das Dezimalzeichen, wenn es nicht schon früher gesetzt worden ist, und verfahre sonst wie oben.

$\sqrt{5|78|34} = 240{,}46$

4

178

44

176

23400

4804

19216

318400

48086

288516

. . u. s. w.

Je mehr Dezimalstellen man sucht, desto genauer findet man die Wurzel. Wenn man im obigen Beispiele mit der Ausziehung der Wurzel nicht weiter

fortfährt, so ist schon um kein Hundertl gefehlt, sucht man noch eine Dezimalstelle, so beträgt der Fehler kein Tausendl u. s. w.

Solche Wurzeln, welche sich nie ganz rein darstellen lassen, nennt man Irrationalzahlen.

Aus einem Dezimalbruche, wobei keine Ganze stehen, zieht man die Wurzel, wie aus einer ganzen Zahl.

Neuntes Hauptstück.

Von dem Cubus und der Cubikwurzel vieltheiliger Größen.

§. 175.

Der Cubus einer zweitheiligen Größe $10a + b$ besteht:

1) aus dem Cubus des ersten Theiles $1000a^3$, welcher immer in den Tausendern enthalten ist;
2) aus dem dreifachen Quadrate des ersten Theiles multiplizirt mit dem zweiten Theile $300a^2b$, welches immer in den Hundertern enthalten ist:
3) aus dem dreifachen Quadrate des zweiten Theiles multiplizirt mit dem ersten Theile $30ab^2$, welches immer in den Zehnern enthalten ist;
4) aus dem Cubus des zweiten Theiles, b^3, welches immer in den Einern enthalten ist.

Ist die zweitheilige Größe eine Summe wie $10a + b$, so sind alle vier eben angegebene Glieder ihres Cubus positiv.

$$(10a + b)^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3$$

Ist die zweitheilige Größe eine Differenz, wie $10a - b$, so ist von den oben angegebenen Gliedern ihres Cubus das erste und dritte positiv, das zweite und vierte negativ.

$$(10a - b)^3 = 1000a^3 - 300a^2b + 30ab^2 - b^3$$

Denn $(10a + b)^3 = (10a + b)(10a + b)(10a + b) =$
$(100a^2 + 20ab + b^2)(10a + b)$ (§. 171.)

$$\begin{array}{l} (100a^2 + 20ab + b^2)\ (10a + b) \\ \hline 1000a^3 + 200a^2b + 10ab^2 \\ \qquad + 100a^2b + 20ab^2 + b^3 \\ \hline 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3 \end{array}$$

Eben so ist $(10a - b)^3 = (10a - b)(10a - b)(10a - b) =$
$(100a^2 - 20ab + b^2)(10a - b)$ (§. 171.)

$$\begin{array}{l} (100a^2 - 20ab + b^2)\ (10a - b \\ \hline 1000a^3 - 200a^2b + 10ab^2 \\ \qquad - 100a^2b + 20ab^2 - b^3 \\ \hline 1000a^3 - 300a^2b + 30ab^2 - b^3 \end{array}$$

Man denke sich die Zahl 15 als eine Summe, etwa als 10 + 5, und erhebe sie nach obiger Formel zum Cubus, so besteht dieser:

1)	aus 10^3	=	1000
2)	aus 3. 10. 10. 5	=	1500
3)	aus 3. 5. 5. 10	=	750
4)	aus 5. 5. 5	=	125

Also $(10 + 5)^3 = 3375 = 15 \times 15 \times 15$

Nun denke man sich 15 als eine Differenz, etwa als 20 — 5, und erhebe diese zum Cubus, so besteht dieser:

1)	aus 20^3	=	8000
2)	aus — (3. 20. 20. 5)	=	— 6000
3)	aus 3. 5. 5. 20	=	1500
4)	aus — 5^3	=	— 125

Also $(20 - 5)^3 = 9500 - 6125 = 3375$

§. 176.

Hat man aus einer gegebenen Größe die Cubikwurzel auszuziehen, so bedenke man, daß $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$.

Hierauf theile man die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von drei zu drei Zifferstellen. (Die höchste Klasse kann auch nur Eine oder zwei Ziffern haben.)

Unter die Ziffern der höchsten Klasse setze man nun jenen Cubus der ersten 9 Zahlen, welcher der durch genannte Ziffern bezeichneten Zahl entweder gleich oder nur um Weniges kleiner ist. Die Cubikwurzel dieses Cubus betrachte man als den ersten Theil der gesuchten Wurzel.

Nun subtrahire man den oben bezeichneten Cubus einer der ersten 9 Zahlen, von den darüber stehenden Ziffern, weil ja in diesen, die man in Beziehung auf die drei Ziffern der folgenden Klasse als die Tausender betrachtet, a^3 enthalten seyn muß, und setze zum allenfallsigen Reste die zunächst folgende Klasse herab.

Da in den Hundertern dieser Klasse $3a^2b$ enthalten, a aber bereits bekannt ist, so braucht man nur den für a gefundenen Werth zum Quadrate zu erheben, dieses mit 3 zu multipliziren, und mit diesem Produkte, also mit $3a^2$ in $3a^2b$, d. i. in die erwähn- Hunderter zu dividiren, so findet man b, oder den zweiten Theil der gesuchten Wurzel.

Mit dem für b gefundenen Werthe multiplizire man den für $3a^2$ gefundenen, so erhält man den Werth für $3a^2b$, welcher nun von den darüberstehenden Hundertern wegzunehmen ist. Nun muß sich aber auch der Werth für $3ab^2$ aus den Zehnern, und der Werth für b^3 aus den Einern wegnehmen lassen, wenn für b kein zu großer Werth angenommen worden ist.

Zum allenfalls erhaltenen Reste setze man, wenn noch eine Klasse da ist, die zunächst folgende Klasse herab, nehme an, daß in den Hundertern dieser Klasse $3a^2b$ enthalten sey, nachdem man die gefundenen bei-

den Ziffern der Wurzel als a betrachtet hat, und verfahre weiter wie vorher.

$$\sqrt[3]{34|012|224} = 324$$

$$a^3 = 27$$

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 < \text{oder} = 7012$$

$$3a^2 = 27$$

$$3a^2b = 54$$

$$3ab^2 = 36$$

$$b^3 = 8$$

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 5768$$ hier ist also $3a^2b + 3ab^2 + b^3 < 7012$

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 < \text{oder} = 1244224$$

$$3a^2 = 3072$$

$$3a^2b = 12288$$

$$3ab^2 = 1536$$

$$b^3 = 64$$

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1244224$$ Hier ist also $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1244224$

$$0$$

§. 177.

Soll die Cubikwurzel aus einer gemischten Zahl gezogen werden, so verwandle man den dabei stehenden Bruch vor allen Dingen in einen Dezimalbruch, und ergänze diesen durch Anhängung von Nullen, oder wenn es ein unendlicher Dezimalbruch ist, durch Anhängung der eben treffenden Ziffern, dergestalt, daß sich die Dezimalen in Klassen von je drei Zifferstellen eintheilen lassen, weil im Cubus einer jeden gemischten Zahl die Anzahl der vorkommenden Dezimalen durch 3 theilbar seyn muß. Denn da nach §. 150. bei der Multiplikation der Dezimalen das Produkt so viele Dezimalstellen haben muß, als die Faktoren mit einander haben, also im Cubus dreimal so

viele Dezimalen vorkommen müssen als in der Wurzel, so ist 1) die Anzahl der Dezimalen des Cubus einer gemischten Zahl immer ein Produkt aus 3, folglich immer durch 3 theilbar; 2) hat die Wurzel immer den dritten Theil der Dezimalstellen des Cubus; man erhält also in der Wurzel immer so viele Dezimalstellen, als der Cubus Klassen von je 3 Dezimalstellen hat. Man braucht daher nichts zu thun als in der Wurzel das Dezimalzeichen zu setzen, sobald man die erste Klasse der Dezimalen herabsetzt.

$$\sqrt[3]{27|543{,}608} = 30{,}2$$

```
 27
 ――――――
   543608
   2700
   5400
     360
       8
 ――――――
   543608
 ――――――
       0
```

§. 178.

Bleibt bei der Ausziehung einer Cubikwurzel von der letzten Klasse des Cubus noch ein Rest, so hänge man an diesen, bis die Wurzel rein oder doch ziemlich nahe gefunden ist, Klassen von je drei Nullen an, und setze zugleich in der Wurzel das Dezimalzeichen, wenn es nicht schon früher gesetzt worden ist. Sonst aber verfahre man wie oben.

$$\sqrt[3]{8|734} = 20{,}5$$

```
 8
 ――――――
 734000
 1200
 6000
  1500
   125
 ――――――
 615125
 ――――――
 118875000 u. s. w.
```

Ist durch die Wurzel die Anzahl von bedeutend großen oder werthvollen Dingen bezeichnet, wovon auch $\frac{1}{1000}$ noch berücksichtiget werden muß, so sucht man eben mehrere Dezimalen; ausserdessen begnügt man sich mit einer Dezimalstelle oder höchstens mit zweien.

Zehntes Hauptstück.

Von den Gleichungen.

§. 179.

Unter einer **Gleichung** versteht man zwei verschiedene Ausdrücke für eine und dieselbe Größe, welche durch das Gleichheitszeichen mit einander verbunden sind. So ist 5 + 8 ein Ausdruck für 13, und $\frac{26}{2}$ ist auch ein Ausdruck für 13. Wenn man nun diese beiden verschiedenen Ausdrücke für eine und dieselbe Größe, nämlich für die Größe 13, durch das Gleichheitszeichen mit einander verbindet, so entsteht die Gleichung

$$5 + 8 = \frac{26}{2}$$

Eine Gleichung wird durch das Gleichheitszeichen in zwei Seiten getheilt. So ist in obiger Gleichung 5 + 8 die erste, und $\frac{26}{2}$ die zweite Seite der Gleichung. Die einzelnen Größen, sie mögen das Zeichen + oder — vor sich haben, nennt man die Glieder der Gleichung. 8, 5 sind also Glieder der Gleichung.

Die Wissenschaft unbekannte Größen mittelst der Gleichungen zu finden, nennt man **Algebra**.

Das Aufsuchen der unbekannten Glieder einer Gleichung nennt man das **Auflösen** der Gleichung; die Gleichung ist aufgelöst, wenn der Werth für alle unbekannte Glieder gefunden ist.

Kommt die unbekannte Größe blos mit dem Exponenten 1 vor, so nennt man die Gleichung eine Gleichung des **ersten Grades**; kommt sie aber auch mit dem Exponenten 2 oder 3 vor, so wird sie im ersteren Falle eine **quadratische**, im zweiten eine

cubische Gleichung genannt; und zwar eine reine quadratische oder cubische Gleichung, wenn die unbekannte Größe blos mit dem Exponenten 2 oder 3 vorkommt, eine unreine, wenn sie überdieß noch mit andern Exponenten vorkommt. Ist in einer Gleichung nur Eine unbekannte Größe vorhanden, so nennt man selbe eine Gleichung mit einer unbekannten Größe, sonst eine Gleichung mit 2, 3, 4 u. s. w. unbekannten Größen.

§. 180.

Um eine Gleichung aufzulösen beachte man Folgendes:

1) Wenn ein oder mehrere Glieder einer Seite der Gleichung Brüche sind, so mache man diese Brüche auf die gewöhnliche Weise gleichnamig.

$$3x - 16 + \frac{x}{2} = 5x - 30 + \frac{x}{4}$$

$$\frac{6x - 32 + x}{2} = \frac{20x - 120 + x}{4}$$

2) Nun schaffe man den Nenner der ersten Seite dadurch weg, daß man die ganze zweite Seite damit multiplizirt (die erste Seite wird damit multiplizirt, wenn man ihn wegläßt), und den Nenner der zweiten Seite schaffe man weg, indem man die ganze erste Seite damit multiplizirt, so erhält man statt obiger Gleichung:

$$24x - 128 + 4x = 40x - 240 + 2x \text{ *)}$$

3) Nun suche man durch Anwendung der Axiome es dahin zu bringen, daß die unbekannte Größe ganz allein auf einer Seite steht, und zwar mit dem Exponenten und Coefficienten 1, so ist die Gleichung gelöst.

*) Man hätte auch zuerst die beiden Nenner mit 2 dividiren, also beide Seiten mit 2 multipliziren (§. 45) können, dadurch wäre der Nenner 2 ohnedieß weggefallen, und der Nenner 4 in 2 verwandelt worden, so daß die erste Seite blos mit 2 hätte multiplizirt werden müssen. Man hätte also erhalten: $12x - 64 + 2x = 20x - 120 + x$.

$$
\begin{array}{rcl}
24x - 128 + 4x & = & 40x - 240 + 2x \\
28x - 128 & = & 42x - 240 \\
-28x & = & -28x \\
\hline
-128 & = & 14x - 240 \\
+240 & = & +240 \\
\hline
112 & = & 14x \\
:14 & = & :14 \\
\hline
8 & = & x
\end{array}
$$

§. 181.

Hat man also eine unbekannte Größe durch die Algebra zu finden, so suche man vor allen Dingen zwei verschiedene Ausdrücke für eine und dieselbe Größe, verbinde diese durch das Gleichheitszeichen und verfahre dann wie §. 180. Z. B. ein Kapital, welches zu 4 Prozent ausgeliehen worden war, wurde nach $\frac{3}{4}$ Jahren sammt den treffenden Interessen zurückbezahlt. Wie groß war das Kapital, wenn Kapital und Interessen zusammen 927 fl. betrugen?

Auflösung. Das Kapital sey x. Da nach §. 83. die Interessen eines Kapitals gefunden werden, wenn man letzteres mit den Jahren und Prozenten multiplizirt und mit 100 dividirt, so sind die Interessen $= (x \times \frac{3}{4} \times 4) : 100 = \frac{3x}{100}$

Das Kapital sammt den Interessen ist also gleich $x + \frac{3x}{100}$; nach der Angabe ist dieses aber auch gleich 927 fl. Wenn man nun diese beiden verschiedenen Ausdrücke für eine und dieselbe Größe durch das Gleichheitszeichen mit einander verbindet, so entsteht nachstehende Gleichung:

$$x + \frac{3x}{100} = 927$$

$$\frac{100x + 3x}{100} = 927 \text{ (§. 180. 1)}$$

$$100x + 3x = 92700 \quad (\S.\ 180.\ 2)$$
$$103x = 92700$$
$$x = \frac{92700}{103} = 900 \quad (\S.\ 180.\ 3)$$

Das Kapital war also 900 fl.

§. 182.

Aufgabe. Ein Weinwirth hat zwei verschiedene Sorten Wein. Von der ersten verkauft er den Eimer um 24 fl., von der zweiten um 34 fl. Nun will er aus diesen beiden Sorten 20 Eimer à 30 fl. mischen. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

Auflösung. Man nehme an, er nehme von dem Weine à 24 fl. gerade x Eimer, so wird er von dem andern à 34 fl. genau $20 - x$ Eimer nehmen müssen, weil ja $x + 20 - x = 20$ ist.

Hätte er x Eimer à 24 fl. einzeln verkauft, so würde er dafür $x$mal 24 fl. oder $24x$ eingenommen haben. Eben so hätte er für $20 - x$ Eimer à 34 fl. genau $(20 - x)$mal 34 fl. oder $680 - 34x$ eingenommen. Wenn er aber 20 Eimer à 30 fl. verkauft, so nimmt er dafür 600 fl. ein. Da er nun für die Mischung eben so viel einnehmen will, als wenn er den Wein einzeln verkauft hätte, so muß $24x$ und $680 - 34x$ zusammen genommen eben so viel sein als 600. Demnach entsteht folgende Gleichung.

$$24x + 680 - 34x = 600$$
$$680 - 10x = 600$$
$$-10x = -80 \;{}^{*})$$
$$10x = 80$$
$$x = 8$$

Er muß also von der ersten Sorte 8, von der zweiten $20 - 8$ oder 12 Eimer nehmen.

Denn 8 Eimer à 24 fl. = 192 fl.
12 Eimer à 34 fl. = 408
Zusammen = 600 fl.

*) Da man die unbekannte Größe am Ende immer mit dem Zeichen + zu erhalten wünscht, so multiplizirt man im obigen und in ähnlichen Fällen die ganze Gleichung mit — 1.

§. 183.

Aufgabe. Einige Kinder wollten ihrem Vater ein Gemälde kaufen. Anfänglich gab jedes Kind 3 fl. 20 kr. dazu her; da hatten sie aber 1 fl. 20 kr. zu wenig. Sie nahmen nun alle ihr Geld wieder zurück, und jedes Kind gab 4 fl. her. Nun hatten sie aber 2 fl. zu viel. Wie viele Kinder waren es? Was kostete das Gemälde?

Auflösung. Man nehme an, daß es x Kinder gewesen seyen. Wenn nun eines $3\frac{1}{3}$ fl. hergegeben hat, so haben sie $\frac{10}{3}$mal x oder $\frac{10x}{3}$ fl. zusammengelegt. Weil ihnen aber da noch 1 fl. 20 kr. zum Ankaufe des Gemäldes fehlten, so kostete selbes

$$\frac{10x}{3} + 1\frac{1}{3}$$

Wenn ferner jedes Kind 4 fl. gegeben hat, so haben x Kinder xmal 4 fl. oder 4x gegeben. Weil aber dieß um 2 fl. zu viel war, so ist der Preis des Gemäldes 4x — 2 gewesen. Verbinde man diese beiden verschiedenen Ausdrücke für den Preis des Gemäldes durch das Gleichheitszeichen, so entsteht die Gleichung:

$$\frac{10x}{3} + \frac{4}{3} = 4x - 2$$

$$\frac{10x + 4}{3} = 4x - 2$$

$$10x + 4 = 12x - 6$$

$$4 = 2x - 6$$

$$10 = 2x$$

$$5 = x$$

Es waren also 5 Kinder.

Das Gemälde kostete $4x - 2 = 4 . 5 - 2 = 20 - 2 = 18$ fl.

§. 184.

Aufgabe. Jemand nimmt einen Arbeiter mit der Bedingung auf, daß er ihm für jeden Arbeitstag 2 fl. geben, für jeden Tag aber, den er nicht arbeite, nicht nur nichts bezahlen, sondern überdieß vom bereits verdienten Lohne 3 fl. abziehen werde. Nach 20 Tagen erhielt der Arbeiter 15 fl. Wie viele Tage hat er gearbeitet? Wie viele Tage hat er nicht gearbeitet?

Auflösung. Man nehme an, er habe x Tage gearbeitet, und folglich 2x fl. verdient. Demzufolge hat er 20 — x Tage nicht gearbeitet, und daher einen Abzug von 20 — xmal 3 fl. also 60 — 3x erlitten. Er erhielt also 2x — (60 — 3x). Zugleich ist gegeben, daß er 15 fl. erhielt. Setzt man diese beiden verschiedenen Ausdrücke einander gleich, so entsteht folgende Gleichung:

$$2x - (60 - 3x) = 15$$

$$2x - 60 + 3x = 15 \text{ (§. 157.)}$$

$$5x - 60 = 15$$

$$5x = 75$$

$$x = 15$$

Er hat also 15 Tage gearbeitet und 5 Tage nicht gearbeitet.

§. 185.

Aufgabe. Jemand hat 14löthiges und $11\frac{1}{2}$löthiges Silber. Nun braucht er 20 Mark 13löthiges Silber. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

Auflösung. Von der ersten Sorte nehme er x Mark, so ist der reine Silbergehalt xmal 14 also 14x Loth. Von der zweiten Sorte muß er folglich 20—x Mark nehmen, und der reine Silbergehalt ist also 20 — xmal $11\frac{1}{2}$ Loth. Dieß zusammen muß gleich seyn 20 Mark 13löthigen Silbers, wovon der reine Silbergehalt 20 X 13 also 260 Loth beträgt.

Demnach entsteht folgende Gleichung:

$$14x + (20-x)\,11\tfrac{1}{2} = 260$$

$$14x + 230 - \frac{23x}{2} = 260$$

$$\frac{28x + 460 - 23x}{2} = 260$$

$$28x + 460 - 23x = 520$$

$$5x + 460 = 520$$

$$5x = 60$$

$$x = 12$$

Er muß also vom 14löthigen 12 Mark, und mithin vom $11\frac{1}{2}$löthigen Silber 8 Mark nehmen.

§. 186.

Aufgabe. Ein Bothe legt täglich 14 Stunden zurück. Nachdem dieser 6 Tagreisen gemacht hat, fährt ihm am siebenten Tage ein zweiter nach mit dem Auftrage, täglich 16 Stunden zu machen. Wie viele Tage braucht der zweite, um den ersten einzuholen?

Auflösung. Man nehme an, der zweite brauche x Tage. Er legt also xmal 16 Stunden oder 16 x zurück. Der erste ist also 6 + x Tage auf dem Wege, und macht folglich 6 + xmal 14 Stunden oder 84

$+ 14x$. Da die Wege, welche beide zurückgelegt haben, gleich seyn müssen, so entsteht folgende Gleichung:

$$16x = 84 + 14x$$
$$2x = 84$$
$$x = 42$$

Der zweite braucht also 42 Tage, in denen er 672 Stunden zurücklegt. Der erste ist also 48 Tage auf dem Wege, in denen er auch 672 Stunden zurücklegt.

§ 187.

Ist man genöthigt, zur Lösung einer Aufgabe mehrere unbekannte Größen anzunehmen, so muß die Aufgabe, wenn sie mit Bestimmtheit gelöst werden soll, so gestellt seyn, daß man eben so viele verschiedene Gleichungen ansetzen kann, als man unbekannte Größen anzunehmen gezwungen ist. Aussserdessen ist die Aufgabe eine **unbestimmte**, welche mehrere Auflösungen zuläßt.

Um Aufgaben mit mehreren unbekannten Größen zu lösen, gibt es 3 Wege. Um nicht weitschweifig zu werden, befolgen wir immer blos einen, welcher bei der Lösung der nachstehenden Aufgabe genau bezeichnet werden soll.

Aufgabe. August sagt zu Carl: Gib du mir von deinem Gelde einen Gulden, so habe ich gerade so viel als du. Das will ich nicht, erwiderte letzterer, gib du mir von dem deinigen einen Gulden, so habe ich gerade zweimal so viel als du. Wie viel hatte jeder?

Auflösung. Man nehme an, August habe x fl. und Carl habe y fl. Wenn also August einen Gulden von Carl bekommen hätte, so würde er $x + 1$, Carl aber $y - 1$ gehabt haben, und da sie in diesem Falle gleich viel gehabt hätten, so entsteht die Gleichung:

$$x + 1 = y - 1.$$

Ferner, wenn Carl einen Gulden von August bekommen hätte, so würde er $y + 1$, August aber $x - 1$

gehabt haben, und da ersterer in diesem Falle zweimal so viel gehabt hätte als letzterer, so wird (x—1) 2 oder $2x - 2 = y + 1$; also $2x - 2 = y + 1$

Man hat also folgende zwei Gleichungen:

$$x + 1 = y - 1$$
$$2x - 2 = y + 1$$

Nun suche man aus jeder dieser Gleichungen nach §. 180. einen Werth für x.

$$x + 1 = y - 1$$
$$x = y - 1 - 1 = y - 2$$

Ferner $2x - 2 = y + 1$

$$2x = y + 1 + 2 = y + 3$$
$$x = \frac{y + 3}{2}$$

Man hat also zwei verschiedene Werthe für x

Nämlich $x = y - 2$ und $x = \frac{y+3}{2}$

Setzt man diese beiden Werthe nach §. 6. einander gleich, so entsteht folgende Gleichung:

$$y - 2 = \frac{y + 3}{2}$$
$$2y - 4 = y + 3$$
$$y - 4 = 3$$
$$y \quad = 7$$

Nun ist $x = y - 2$; also $= 7 - 2 = 5$. August hatte also 5, und Carl 7 fl.

§. 188.

Aufgabe. Man hat eine gewisse Menge Gold und Silber mit einander vermischt. Die ganze Mischung nimmt einen Raum von 12 Cubikzoll ein, und wiegt 100 Unzen. Ein Cubikzoll Gold wiegt $12\frac{2}{3}$ Unzen, und ein Cubikzoll Silber $6\frac{8}{9}$ Unzen. Wie viel Gold und wie viel Silber befindet sich in der Mischung?

Auflösung. Man nehme an, es seyen x Cubikzoll Gold, und y Cubikzoll Silber. Daraus entsteht die Gleichung:

$$x + y = 12.$$

Ferner werden x Cubikzoll Gold, da ein Cubikzoll $= 12\frac{2}{3}$ Unzen, xmal $12\frac{2}{3}$ Unzen, oder $\frac{38x}{3}$ Unzen wiegen; eben so werden y Cubikzoll Silber, da ein Cubikzoll $= 6\frac{8}{9}$ Unzen, ymal $6\frac{8}{9}$ Unzen, oder $\frac{62y}{9}$ Unzen wiegen. Da diese Gewichte zusammen $= 100$ Unzen, so entsteht folgende Gleichung

$$\frac{38x}{3} + \frac{62y}{9} = 100$$

Man hat also die beiden Gleichungen:

$$x + y = 12$$

$$\frac{38x}{3} + \frac{62y}{9} = 100$$

Aus der ersten Gleichung einen Werth für x gesucht.

$$x + y = 12$$

$$x = 12 - y$$

Aus der zweiten Gleichung einen Werth für x gesucht:

$$\frac{38x}{3} + \frac{62y}{9} = 100$$

$$\frac{114\,x + 62y}{9} = 100$$

$$114\,x + 62y = 900$$

$$114\,x = 900 - 62y$$

$$x = \frac{900 - 62y}{114}$$

Die beiden Werthe für x durch das Gleichheitszeichen mit einander verbunden.

$$12 - y = \frac{900 - 62y}{114}$$

$$1368 - 114y = 900 - 62y$$

$$1368 = 900 + 52y$$

$$468 = 52y$$

$$9 = y$$

Also $x = 12 - y = 12 - 9 = 3$

Es waren mithin 3 Cubikzoll Gold und 9 Cubikzoll Silber. *)

*) Dieses Resultat kann indessen nicht als ganz richtig angenommen werden, indem die Dichtigkeit des Gemenges eine andere ist als die der unvermengten Metalle.

§. 189.

Aufgabe. Ein Kaufmann verkaufte 15 Zentner Zucker und 12 Zentner Kaffee zusammen um 1368 fl. Ferner ganz zu denselben Preisen 18 Zentner Zucker und 7 Zentner Kaffee zusammen um 1242 fl. Wie theuer hat er den Zentner jeder Waare in Rechnung gebracht?

Auflösung. Man nehme an, er habe den Zentner Zucker um x, und den Zentner Kaffee um y fl. in Rechnung gebracht, so kosten 15 Zentner Zucker und 12 Zentner Kaffee 15 x + 12 y fl., welches zusammen = 1368 fl. ist. Also

$$15x + 12y = 1368$$

Eben so kosten 18 Zentner Zucker und 7 Zentner Kaffee 18 x + 7 y fl. welches zusammen = 1242 fl. ist. Also

$$18x + 7y = 1242$$

Man hat demnach folgende Gleichungen:

$$15x + 12y = 1368$$

$$18x + 7y = 1242$$

Aus jeder Gleichung einen Werth für x gesucht.

$$15x + 12y = 1368$$
$$15x = 1368 - 12y$$
$$x = \frac{1368 - 12y}{15}$$

Ferner $18x + 7y = 1242$
$$18x = 1242 - 7y$$
$$x = \frac{1242 - 7y}{18}$$

Diese beiden Werthe für x durch das Gleichheitszeichen mit einander verbunden.

$$\frac{1368 - 12y}{\overset{5}{\cancel{15}}} = \frac{1242 - 7y}{\overset{6}{\cancel{18}}}$$

$$8208 - 72y = 6210 - 35y$$
$$8208 = 6210 + 37y$$
$$1998 = 37y$$
$$\frac{1998}{37} = y$$
$$54 = y$$

Also $x = \frac{1242 - 7y}{18} = \frac{1242 - 378}{18} = \frac{864}{18} = 48$

Er rechnete also den Zentner Zucker um 48, und den Zentner Kaffee um 54 fl.

§. 190.

Kommen in einer Aufgabe drei unbekannte Größen x, y und z vor, so setze man vor allem drei Gleichungen an, suche aus jeder dieser Gleichungen einen Werth für x, setze die aus der ersten und zweiten Gleichung für x gefundenen Werthe, und eben so die aus der zweiten (oder ersten) und dritten Gleichung für x gefundenen Werthe zu neuen Gleichungen zu-

sammen, und erhält so zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Größen, welche nach der oben angegebenen Weise aufzulösen sind.

Aufgabe. Ein Oekonom verkaufte 5 Schäffel Weizen, 3 Schäffel Gerste und 7 Schäffel Roggen zusammen um 154 fl.; ferner 8 Schäffel Weizen, 4 Schäffel Gerste und 9 Schäffel Roggen zusammen um 218 fl.; endlich 2 Schäffel Weizen, 1 Schäffel Gerste und 3 Schäffel Roggen zusammen um 62 fl. Wie hoch hat er das Schäffel von jeder Getreidsorte angerechnet?

Auflösung. Man nehme an, er habe das Schäffel Weizen zu x, das Schäffel Gerste zu y, und das Schäffel Roggen zu z fl. verkauft; so kosten:

5 Schäffel Weizen 5mal x oder 5x,
3 Schäffel Gerste 3mal y oder 3y,
7 Schäffel Roggen 7mal z oder 7z

Also 5 Sch. W., 3 Sch. G., 7 Sch. R. = 5x + 3y + 7z.

Man weiß aber auch, daß 5 Sch. W., 3 Sch. G., und 7 Sch. R. zusammen 154 fl. kosten. Setzt man diese beiden Preise einander gleich, so entsteht folgende Gleichung:

$$5x + 3y + 7z = 154$$

Auf ähnliche Weise entstehen die Gleichungen:

$$8x + 4y + 9z = 218$$
$$2x + y + 3z = 62$$

Man hat also die 3 Gleichungen:

$$5x + 3y + 7z = 154$$
$$8x + 4y + 9z = 218$$
$$2x + y + 3z = 62$$

Nun suche man aus jeder dieser Gleichungen einen Werth für x.

1) $$5x + 3y + 7z = 154$$
$$5x = 154 - 3y - 7z$$
$$x = \frac{154 - 3y - 7z}{5}$$

2) $8x + 4y + 9z = 218$

$$8x = 218 - 4y - 9z$$

$$x = \frac{218 - 4y - 9z}{8}$$

3) $2x + y + 3z = 62$

$$2x = 62 - y - 3z$$

$$x = \frac{62 - y - 3z}{2}$$

Setzt man den in Nr. 1. und Nr. 2. gefundenen, und eben so den in Nr. 2. und Nr. 3. gefundenen Werth zusammen, so entstehen folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{154 - 3y - 7z}{5} = \frac{218 - 4y - 9z}{8}$$

$$\frac{218 - 4y - 9z}{8} = \frac{62 - y - 3z}{2}$$

Nun suche man aus jeder dieser beiden Gleichungen einen Werth für y.

a) $\frac{154 - 3y - 7z}{5} = \frac{218 - 4y - 9z}{8}$

$$1232 - 24y - 56z = 1090 - 20y - 45z$$

$$1232 - 56z = 1090 + 4y - 45z$$

$$142 - 11z = 4y$$

$$\frac{142 - 11z}{4} = y$$

b) $\frac{218 - 4y - 9z}{8} = \frac{62 - y - 3z}{2}$

4

$$218 - 4y - 9z = 248 - 4y - 12z \text{ *)}$$

$$218 - 9z = 248 - 12z$$

$$218 + 3z = 248$$

$$3z = 30$$

$$z = 10$$

*Hier fällt zufällig die Größe y ganz hinaus, so daß eine Gleichung mit einer unbekannten Größe entsteht, für welche der Werth sogleich gefunden werden kann.

Nach Lit. a. ist $y = \frac{142-11z}{4} = \frac{142-110}{4} = \frac{32}{4} = 8$

Nach Nr. 1) ist $x = \frac{154-3y-7z}{5}$

$$= \frac{154-24-70}{5}$$

$$= \frac{60}{5}$$

$$= 12$$

Das Schäffel Weizen ist also zu 12, das Schäffel Gerste zu 8, und das Schäffel Roggen zu 10 fl. gerechnet worden.

§. 191.

Aufgabe. Eine Obsthändlerin sagt: ich verkaufe 2 Aepfel, eine Birne und einen Pfirsich zusammen um 7 kr.; 2 Aepfel, 3 Birnen und 4 Pfirsiche zusammen um 20 kr.; 3 Aepfel, 5 Birnen und 4 Pfirsiche um 25 kr.. Wie theuer rechnete sie das Stück von jeder Sorte?

Auflösung. Man nehme an, ein Apfel koste x, eine Birne y, und ein Pfirsich z kr., so entstehen folgende Gleichungen:

$$2x + y + z = 7$$
$$2x + 3y + 4z = 20$$
$$3x + 5y + 4z = 25$$

Aus jeder dieser Gleichungen einen Werth für x gesucht.

1) $2x + y + z = 7$

$$2x = 7 - y - z$$

$$= \frac{7-y-z}{2}$$

2) $2x + 3y + 4z = 20$

$$2x = 20 - 3y - 4z$$

$$x = \frac{20 - 3y - 4z}{2}$$

3) $3x + 5y + 4z = 25$

$$3x = 25 - 5y - 4z$$

$$x = \frac{25 - 5y - 4z}{3}$$

Die in Nr. 1. und Nr. 2. gefundenen, und eben so die in Nr. 2. und Nr. 3. gefundenen Werthe für x zu neuen Gleichungen verbunden.

$$\frac{7 - y - z}{2} = \frac{20 - 3y - 4z}{2}$$

$$\frac{20 - 3y - 4z}{2} = \frac{25 - 5y - 4z}{3}$$

Aus jeder dieser Gleichungen einen Werth für y gesucht.

a) $\frac{7 - y - z}{2} = \frac{20 - 3y - 4z}{2}$

$$7 + 2y - z = 20 - 4z$$

$$2y = 13 - 3z$$

$$y = \frac{13 - 3z}{2}$$

b) $\frac{20 - 3y - 4z}{2} = \frac{25 - 5y - 4z}{3}$

$$60 - 9y - 12z = 50 - 10y - 8z$$

$$60 + y - 12z = 50 - 8z$$

$$y = 4z - 10$$

Die in Lit. a. und Lit. b. für y gefundenen Werthe zu einer neuen Gleichung verbunden.

$$\frac{13 - 3z}{2} = 4z - 10$$

$$13 - 3z = 8z - 20$$
$$13 = 11z - 20$$
$$33 = 11z$$
$$3 = z$$

Nach Lit. b. ist $y = 4z - 10 = 12 - 10 = 2$.

Nach Nr. 1) ist $x = \frac{7-y-z}{2} = \frac{7-2-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Ein Apfel kostete demnach 1 kr.; eine Birne 2 kr.; ein Pfirsich 3 kr.

§. 192.

Aufgabe. Man hat dreierlei Arten von Gold. In der ersten ist die Mischung so, daß in 16 Unzen 7 Unzen Gold, 8 Unzen Silber, 1 Unze Kupfer befindlich ist; in der zweiten befinden sich in 16 Unzen 5 Unzen Gold, 7 Unzen Silber und 4 Unzen Kupfer; in der dritten sind in 16 Unzen 2 Unzen Gold, 9 Unzen Silber und 5 Unzen Kupfer. Aus diesen 3 Mischungen will man eine neue zusammensetzen, so daß auf 16 Unzen $4\frac{15}{16}$ Unzen Gold, $7\frac{10}{16}$ Unzen Silber, $3\frac{7}{16}$ Unzen Kupfer gehen sollen. Wie viel hat man von jeder der 3 obigen Sorten zu nehmen?

Auflösung. Man nehme an, daß von der ersten Sorte x, von der zweiten y, von der dritten Sorte z Unzen zu nehmen seyen. Da in 16 Unzen der ersten Sorte 7 Unzen, also in einer Unze $\frac{7}{16}$ Unzen Gold enthalten sind, so müssen in x Unzen xmal $\frac{7}{16}$ Unzen Gold oder $\frac{7x}{16}$ enthalten seyn. Aus demselben Grunde sind in y Unzen der zweiten Sorte ymal $\frac{5}{16}$ Unzen Gold oder $\frac{5y}{16}$, und in z Unzen der dritten Sorte zmal $\frac{2}{16}$ Unzen Gold oder $\frac{2z}{16}$. Da dieß zusammen $4\frac{15}{16}$ Unzen Gold betragen muß, so entsteht die Gleichung:

$$\frac{7x}{16} + \frac{5y}{16} + \frac{2z}{16} = 4\frac{15}{16}$$

$$\frac{7x + 5y + 2z}{16} = \frac{79}{16}$$

Also $7x + 5y + 2z = 79$

Ferner, da in 16 Unzen der ersten Sorte 8 Unzen, also in einer Unze $\frac{8}{16}$ Unzen Silber enthalten sind, so müssen in x Unzen xmal $\frac{8}{16}$ Unzen Silber oder $\frac{8x}{16}$ enthalten seyn. Aus demselben Grunde sind in y Unzen der zweiten Sorte ymal $\frac{7}{16}$ Unzen Silber oder $\frac{7y}{16}$, und in z Unzen der dritten Sorte zmal $\frac{9}{16}$ Unzen Silber oder $\frac{9z}{16}$. Da dieß zusammen $7\frac{10}{16}$ Unzen Silber betragen muß, so entsteht die Gleichung

$$\frac{8x}{16} + \frac{7y}{16} + \frac{9z}{16} = 7\frac{10}{16}$$

$$\frac{8x + 7y + 9z}{16} = \frac{122}{16}$$

Also $8x + 7y + 9z = 122$

Endlich, da in 16 Unzen der ersten Sorte 1 Unze, also in einer Unze $\frac{1}{16}$ Unzen Kupfer enthalten sind, so müssen in x Unzen xmal $\frac{1}{16}$ Unzen Kupfer oder $\frac{x}{16}$ enthalten seyn. Aus demselben Grunde müssen in y Unzen der zweiten Sorte ymal $\frac{4}{16}$ Unzen Kupfer oder $\frac{4y}{16}$ enthalten seyn, und in z Unzen der dritten Sorte zmal $\frac{5}{16}$ Unzen Kupfer oder $\frac{5z}{16}$ enthalten seyn. Da dieß zusammen $3\frac{7}{16}$ Unzen Kupfer betragen muß, so entsteht die Gleichung:

$$\frac{x}{16} + \frac{4y}{16} + \frac{5z}{16} = 3\frac{7}{16}$$

$$\frac{x + 4y + 5z}{16} = \frac{55}{16}$$

Alſo $x + 4y + 5z = 55$

Man hat alſo die 3 Gleichungen:

$$7x + 5y + 2z = 79$$
$$8x + 7y + 9z = 122$$
$$x + 4y + 5z = 55$$

Nun ſuche man aus jeder dieſer Gleichungen einen Werth für x.

1) $7x + 5y + 2z = 79$

$$7x = 79 - 5y - 2z$$
$$x = \frac{79 - 5y - 2z}{7}$$

2) $8x + 7y + 9z = 122$

$$8x = 122 - 7y - 9z$$
$$x = \frac{122 - 7y - 9z}{8}$$

3) $x + 4y + 5z = 55$

$$x = 55 - 4y - 5z$$

Nun verbinde man die in Nr. 1. und Nr. 2. und eben ſo die in Nr. 1. und Nr. 3. für x gefundenen Werthe zu neuen Gleichungen, und ſuche aus jeder einen Werth für y.

$$\frac{79 - 5y - 2z}{7} = \frac{122 - 7y - 9z}{8}$$

$$\frac{79 - 5y - 2z}{7} = 55 - 4y - 5z$$

a) $\frac{79 - 5y - 2z}{7} = \frac{122 - 7y - 9z}{8}$

$$632 - 40y - 16z = 854 - 49y - 63z$$
$$632 + 9y - 16z = 854 - 63z$$
$$9y = 222 - 47z$$

$$y = \frac{222 - 47z}{9}$$

b) $$\frac{79 - 5y - 2z}{7} = 55\ 4y - 5z$$

$$79 - 5y\ 2z = 385 - 28y - 35z$$

$$79 + 23y - 2z = 385 - 35z$$

$$23y = 306 - 33z$$

$$y = \frac{306 - 33z}{23}$$

Nun verbinde man die sub lit. a. und b. für y gefundenen Werthe zu einer neuen Gleichung, und suche daraus einen Werth für z.

$$\frac{222 - 47z}{9} = \frac{306 - 33z}{23}$$

$$5106 - 1081z = 2754 - 297z$$

$$5106 = 2754 + 784y$$

$$2352 = 784z$$

$$3 = z$$

Nun setze man in dem sub lit. b. für y gefundenen Werthe den Werth für z.

$$y = \frac{306 - 33z}{23} = \frac{306 - 99}{23} = \frac{207}{23} = 9$$

Nun setze man in dem sub Nr. 3. für x gefundenen Werthe die Werthe für y und z

$$x = 55 - 4y - 5z = 55 - 36 - 15 = 4$$

Man muß also von der ersten Sorte 4, von der zweiten 9, und von der dritten 3 Mark nehmen.

§. 193.

Hat man die unbekannte Größe ganz allein mit dem Coefficienten 1, jedoch mit dem Exponenten 2 oder 3 auf eine Seite gebracht, so braucht man nur aus beiden Seiten der Gleichung die Quadrat- oder

Cubikwurzel auszuziehen, um sie auch mit dem Exponenten 1 zu erhalten.

$$x^2 = 64$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{64}$$
$$x = \pm 8$$

x kann nämlich $= + 8$ oder auch $= - 8$ seyn, weil $(+8) \times (+8) = +64$ und $(-8) \times (-8)$ auch $= +64$ ist.

$x^3 = 512$	$x^3 = -512$
$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{512}$	$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-512}$
$x = 8$	$x = -8$

Denn wenn man in der Gleichung $x = 8$ den ersten Theil der Gleichung mit x, den zweiten mit 8 multiplizirt, so ist nach §. 6. auch $x^2 = 64$. Wenn man ferner in der Gleichung $x^2 = 64$ den ersten Theil der Gleichung mit x, den zweiten mit 8 multiplizirt, so ist nach §. 6. auch $x^3 = 512$. Eben so kann man umgekehrt in der Gleichung $x^3 = 512$ den ersten Theil der Gleichung mit x, den zweiten mit 8 dividiren, und es ist nach §. 6. auch $x^2 = 64$. Ferner kann man in der Gleichung $x^2 = 64$ den ersten Theil der Gleichnng mit x, den zweiten mit 8 dividiren, und es ist nach §. 6. auch $x = 8$. Eine Gleichung bleibt demnach unverändert, wenn man beide Seiten zu Potenzen einerlei Grades erhebt, oder aus beiden Seiten die Wurzeln einerlei Grades auszieht.

§. 194.

Aufgabe. Nach den Gesetzen der Physik findet man auf einer falschen Wage das wahre Gewicht (x) eines Körpers, wenn man die Quadratwurzel aus dem Produkte der Gewichte a und b zieht, die der Körper hat, in der einen und andern Wagschale gewogen.

Es ist also $x^2 = a \times b = ab$. Gesetzt eine Kiste wiege, in die eine Wagschale gelegt, 245, in

die andere derselben Wage gelegt, aber 258 Pf. Wie groß ist das wahre Gewicht der Kiste?

Auflösung.

$$x^2 = 245 \times 258 = 63210.$$
$$x = \sqrt{63210} = 251,4.$$

Denn $\sqrt{6|32|10|} = 251,4$

```
  4
 232
  45
 225
   710
   501
   20900
    5024
   20096
     804 u. s. w.
```

§. 195.

Kommt in einer Gleichung die unbekannte Größe nicht blos mit dem Exponenten 2 sondern auch noch mit dem Exponenten 1 vor, so nennt man sie eine unreine quadratische Gleichung. Jede solche läßt sich nun auf nachstehende Formel bringen: $x^2 + px = q$. Es läßt sich nämlich jede quadratische Gleichung so ordnen, daß das Quadrat der unbekannten Größe auf einer Seite positiv nur einmal im Anfange zu stehen kommt; daß auf der nämlichen Seite die einfache unbekannte Größe mit der Summe ihrer Coeffizienten, welche man, sie mag positiv oder negativ seyn, allemal durch p ausdrücken kann, sich befinde; daß endlich auf der andern Seite nur gegebene Größen vorkommen, deren positive oder negative Summe man wieder durch q bezeichnen kann.

§. 196.

In einer unreinen quadratischen Gleichung von der Form $x^2 + px = q$, ist $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)} = \frac{-p \pm \sqrt{(4q + p^2)}}{2}$,

Beweis. Man sieht, daß die erste Seite der Gleichung: $x^2 + px = q$ kein vollständiges Quadrat sey. Dieses würde allenfalls heißen $x^2 + 2bx + b^2$. Nun ist das erste Glied x^2 in der Gleichung vorhanden; statt $2bx$ haben wir in unserer Gleichung px; p ist also der doppelte zweite Theil der Wurzel; mithin der zweite Theil der Wurzel $= \frac{p}{2}$ und das Quadrat desselben $= \frac{p^2}{4}$. Addirt man nun auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{p^2}{4}$, wodurch nach §. 6. die Gleichung unverändert bleibt, so erhält man: $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}$

Nun ist (§. 193.) $\sqrt{\left(x^2 + px + \frac{p^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(q + \frac{p^2}{4}\right)}$

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{q + p^2}{4}\right)}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4q + p^2}{4}\right)}$$

$$= \frac{-p \pm \sqrt{(4q + p^2)}}{2}$$

§. 197.

Aufgabe. Es kauft Jemand einen Garten, der 1190 Quadratruthen groß ist, und dabei ein Rechteck bildet, dessen Breite eine Ruthe weniger beträgt, als dessen Länge. Wie lange und wie breit war er?

Auflösung. Man denke sich, der Garten sey x Ruthen lang, so wird er offenbar $x - 1$ Ruthen breit seyn. Da nun der Flächeninhalt eines Rechteckes gefunden wird, wenn man die Länge, x, mit der Breite,

$x - 1$, multiplizirt, so ist $x^2 - x$ ein Ausdruck für den Flächeninhalt des Gartens. 1190 Quadratruthen ist ein zweiter Ausdruck für die Größe des Gartens.

Verbindet man nun diese beiden verschiedenen Ausdrücke für eine und dieselbe Größe durch das Gleichheitszeichen, so entsteht nachstehende Gleichung:

$$x^2 - x = 1190$$

Bestimmt man nun x nach der in §. 196. entwickelten Formel, so ist

$$x = \frac{+1^{*)} \pm \sqrt{(4 \times 1190 + 1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4761}}{2}$$

$$= \frac{1 +^{**} 69}{2} = 35$$

Der Garten ist also 35 Ruthen lang und 34 Ruthen breit.

*Weil p mit dem Zeichen — auf der zweiten Seite steht, wenn die erste Seite $x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ heißt, so ist klar, daß p mit dem Zeichen + auf die zweite Seite kommen müsse, wenn es auf der ersten $x^2 - px$ heißt, denn offenbar ist von $x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ die Wurzel $x + \frac{p}{2}$, und $\frac{p}{2}$ kommt mit dem Zeichen — auf die andere Seite. Dagegen ist von $x^2 - px + \frac{p^2}{4}$ die Wurzel $= x - \frac{p}{2}$, und $\frac{p}{2}$ kommt also mit dem Zeichen + auf die andere Seite.

** Daß $\frac{1 - 69}{2}$ das wahre Resultat nicht seyn könne, sieht man beim ersten Anblicke.

Eilftes Hauptstück.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 198.

Wenn man zwei Größen so mit einander vergleicht, daß die eine das Maß der andern wird, so entsteht ein Verhältniß. Das Verhältniß heißt arithmetisch, wenn man darauf Rücksicht nimmt, um wie viele Einheiten die eine Größe mehr habe als die andere; dagegen ist das Verhältniß ein geometrisches, wenn man darauf Rücksicht nimmt, wie oft die eine Größe in der andern enthalten sey. Das Zeichen des arithmetischen Verhältnisses ist daher das Zeichen der Subtraktion (—); das Zeichen des geometrischen Verhältnisses aber ist das Zeichen der Division (:). Man setzt diese Zeichen zwischen die mit einander verglichenen Größen, und liest sie: verhält sich arithmetisch, oder: verhält sich geometrisch.

Die Größen, welche in einem Verhältnisse vorkommen, nennt man die Glieder des Verhältnisses, und zwar das erste das Vorderglied, das zweite das Hinterglied. Jene Größe, welche im arithmetischen Verhältnisse anzeigt, um wie viele Einheiten das eine Glied mehr habe als das andere, und jene, welche im geometrischen Verhältnisse anzeigt, wie oft das eine Glied im andern enthalten sey, nennt man die Verhältnißexponenten.

Verhältnisse sind gleich, wenn sie gleiche Verhältnißexponenten haben; ungleich, wenn sie verschiedene Verhältnißexponenten haben. Verhältnisse sind steigend, wenn das Hinterglied größer als das Vorderglied ist; im entgegengesetzten Falle sind die Verhältnisse fallend.

$$3 \overset{2}{—} 5$$

Vorstehendes ist ein arithmetisches Verhältniß. 3 ist das Vorder- und 5 das Hinterglied, 2 der Er-

ponent dieses Verhältnisses. Da das Vorderglied kleiner als das Hinterglied ist, so ist es auch ein steigendes Verhältniß, so wie 5 — 3 ein fallendes arithmetisches Verhältniß wäre. Zugleich sieht man, daß das zweite Glied 5 gleich ist dem ersten + deren Verhältnißexponenten oder der Differenz. Heißt man daher das erste Glied a und die Differenz d, so ist das 2te Glied a + d. Daraus entsteht der allgemeine Ausdruck für das arithmetische steigende Verhältniß.

$$a — (a + d)$$

Eben so ist 6 : 12 ein geometrisches steigendes Verhältniß, wofür der allgemeine Ausdruck: a : aq, weil ja auch das Hinterglied gleich ist dem Vordergliede, multiplizirt mit dem Quotienten.

§. 199.

Eine **Proportion** ist die Verbindung zweier gleicher Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen. Die Proportion ist **arithmetisch**, wenn die beiden Verhältnisse arithmetisch sind; dagegen ist die Proportion **geometrisch**, wenn die beiden Verhältnisse geometrisch sind.

Die einzelnen Größen, welche in einer Proportion vorkommen, nennt man die Glieder der Proportion, und zwar das erste und vierte die **äußern**, das zweite und dritte die **innern** Glieder. Auch nennt man das erste und dritte, als die beiden Vorderglieder, so wie das zweite und vierte, als die beiden Hinterglieder, die **gleichnamigen** oder **homologen** Glieder. Sind ferner in einer Proportion die beiden innern Glieder gleich, so nennt man die Proportion **stätig**; sind die innern Glieder verschieden, so heißt die Proportion **diskret**.

§. 200.

Eine diskrete arithmetische Proportion läßt sich allgemein so darstellen:

$$a — (a + b) = b — (b + d)$$

Eine stätige arithmetische:

$$a - (a+d) = (a+d) - (a+2d)$$

Oder kürzer: $a - (a+d) - (a+2d)$

Eine diskrete geometrische:

$$a : aq = b : bq$$

Eine stätige geometrische:

$$a : aq = aq : aq^2$$

Oder kürzer: $a : aq : aq^2$

§. 201.

1.) In der arithmetischen diskreten Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der innern Glieder.

$$a - (a+d) = b - (b+d)$$
$$a + b + d = a + b + d \text{ (§. 6.)}$$

2.) In der arithmetischen stätigen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich dem doppelten Mittelgliede.

$$a - (a+d) - (a+2d)$$
$$a + a + 2d = (a+d)\,2$$
$$2a + 2d = 2a + 2d$$

Denn $a - (a+d) - (a+2d)$ ist so viel als $a - (a+d) = (a+d) - (a+2d)$ Da ist nun wirklich $a + a + 2d = a + d + a + d$ oder $2a + 2d = 2a + 2d$.

3.) In der geometrischen diskreten Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte der innern Glieder.

$a : aq = b : bq, \; abq = abq$

4.) In der geometrischen stätigen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Quadrate des mittleren Gliedes $a : aq : aq^2, \; a^2 q^2 = a^2 q^2$

*In der arithm. und geom. stätigen Proportion nennt man das Mittelglied die mittlere Proportionalzahl.

**Aus jeder Proportion läßt sich eine Gleichung bilden, und es ist daher leicht ein fehlendes Glied zu finden. Umgekehrt läßt sich aus einer Gleichung wieder eine Proportion bilden. Wenn nämlich die Summe zweier Größen gleich ist der Summe zweier andern Größen, so entsteht eine arithmetische Proportion, wenn man die beiden Summanden der ersten Summe zu äußern, und die der zweiten zu innern Gliedern macht. Ist das Produkt zweier Größen gleich dem Produkte zweier andern, so entsteht eine geometrische Proportion, wenn man die Faktoren des einen Produktes zu äußern, die des andern zu innern Gliedern macht.

§. 202.

Eine Proportion bleibt unverändert, so lange bei der arithmetischen die Summe, oder bei der geometrischen das Produkt der äußern und innern Glieder gleich bleibt. $a : aq = b : bq = aq : a = bq : b$; oder $a - (a + d) = b - (b + d) = (a + d) - a = (b + d) - b$; man kann also die äußern Glieder zu innern machen und umgekehrt. $a : aq = b : bq = a : b = aq : bq = bq : aq = b : a$ oder $a - (a + d) = b - (b + d) = (b + d) - (a + d) = b - a$, man kann also die äußern oder innern Glieder unter sich versetzen. $a - (a + d) = b - (b + d) = am - (am + dm) = bm - (bm + dm)$ oder $a : aq = b : bq = am : amq = bm : bmq$; man kann also alle vier Glieder mit einer und derselben Größe multipliziren und daher auch dividiren. $a : aq = b : bq = am : amq = b : bq$; man kann also bei der geom. Prop. auch eines der äußern und eines der innern Glieder durch eine und dieselbe Größe multipliziren oder dividiren. $a : aq = b : bq = (a \pm b) : (aq \pm bq) = a : aq$; es verhält sich also in der geom. Proportion die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede. $a : aq = b : bq = (a \pm aq) : (b \pm bq) = a : b$; es verhält sich also in der geometr. Proportion die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zur Summe

oder Differenz der beiden letzten Glieder, wie ein Paar homologer Glieder. $a - (a + d) = b - (b + d) = (a \pm u) - (a + d \pm u) = (b \pm u) - (b + d \pm u) = (a \mp u) - (a + d \mp u) = a - (a + d)$. Man kann also in einer arithm. Proportion entweder zu allen, oder nur zu einem innern und einem äußern Gliede eine und dieselbe Größe addiren oder subtrahiren. Wenn $a : aq = b : bq$ und $m : md = x : xd$, so ist $am : amdq = bx : bdqx$; wenn $a - (a + d) = b - (b + d)$ und $u - (u + o) = n - (n + o)$ so ist $(a + u) - (a + d + u + o)$ $(b + n) - (b + d + n + o)$ Man kann also von zwei geometr. Proportionen die entsprechenden Glieder multipliziren; von zwei arithmetischen addiren, und erhält wieder eine Proportion.

§. 203.

Von den vier Gliedern einer Proportion sind immer drei gegeben, und das vierte ist nicht selten unbekannt. Auch sind von den vier Gliedern immer zwei und zwei Glieder gleichartig, oder können es doch werden. Von diesen kann man ein Paar die Ursachen (wie bei der Regel detri), das andere Paar die Wirkungen nennen. Ist nun mit dem Zunehmen der Ursachen ein Zunehmen der Wirkungen verbunden, so nennt man die Proportion eine gerade; ist aber mit dem Zunehmen der Ursachen ein Abnehmen der Wirkungen verbunden, so nennt man die Proportion eine ungerade. Wird ferner die Wirkung um so viele Einheiten größer oder kleiner, um wie viele Einheiten die Ursache zu- oder abnimmt, so ist die Proportion eine arithmetische; wird aber die Wirkung so vielmal größer oder kleiner, als die eine Ursache in der andern enthalten ist, so ist die Proportion eine geometrische.

§. 204.

Gerade Proportionen (sie mögen nun arithmetisch oder geometrisch seyn) werden so angesetzt, daß das dritte Glied sich auf das erste, und das vierte sich auf das zweite bezieht; daß das dritte die Wirkung des ersten, und das vierte die Wirkung des zweiten Gliedes bezeichnet. Ungerade Proportionen setzt man so an, daß das vierte Glied die Wirkung des ersten, und das dritte die Wirkung des 2ten Gliedes bezeichnet.

§. 205.

Aufgabe. Als August 24 Stufen einer Treppe erstiegen hatte, hatte er noch 116 Stufen zu ersteigen. Wie viele wird er noch haben ersteigen müssen, nachdem er im Ganzen 87 Stufen erstiegen hatte?

Auflösung. Man setze in das erste Verhältniß die erstiegenen, in das zweite die noch zu ersteigenden Stufen. Da der zu ersteigenden Stufen um so weniger sind, je mehr die erstiegenen zugenommen haben, so ist die Proportion eine ungerade. Da die zu ersteigenden endlich um so viele Einheiten abnehmen, um wie viele Einheiten die erstiegenen zunehmen, so ist die Proportion eine arithmetische. Setzt man nun im ersten Verhältnisse 24 — 87, so beziehen sich auf 24 Stufen die noch zu ersteigenden 116, auf 87 die noch zu ersteigenden x Stufen. Da nun die Proportion ungerade ist, so setze man sie so an:

$$24 - 87 = x - 116$$
$$x + 87 = 116 + 24$$
$$x + 87 = 140$$
$$x = 140 - 87 = 53$$

§. 206.

Aufgabe. Was kosten $24\frac{1}{2}$ Ellen einer Waare, wenn 9 Ellen derselben Waare 5 fl. kosten?

Auflösung. Man setze in das erste Verhältniß die Ellen, in das zweite die Preise derselben. Da die Preise zunehmen, wenn der Ellen mehrere werden, so ist die Proportion eine gerade. Da ferner die Preise so vielmal größer werden, wie vielmal der Ellen mehrere werden, so ist die Proportion eine geometrische. Setzt man nun im ersten Verhältnisse $9 : 24\frac{1}{2}$, so bezieht sich auf 9 Ellen 5 fl. (der Preis der 9 Ellen),

auf $24\frac{1}{2}$ Ellen aber x fl. (der Preis derselben). Es entsteht demnach die Proportion:

$$9 : 24\tfrac{1}{2} = 5 : x$$
$$9x = 122\tfrac{1}{2}$$
$$x = 13\tfrac{11}{18}$$

§. 207.

Aufgabe.

Wie viele Ellen eines $1\frac{1}{2}$ Elle breiten Tuches braucht man zu einem Mantel, wozu 10 Ellen eines $1\frac{3}{4}$ Ellen breiten Tuches nöthig sind?

Auflösung.

Man setze in das erste Verhältniß die beiden Breiten, in das zweite die beiden Längen. Da die Längen abnehmen, wenn die Breiten zunehmen, so ist die Proportion eine ungerade. Da ferner die Längen so vielmal geringer seyn müssen, um wie vielmal die Breiten größer geworden sind, so ist die Proportion eine geometrische. Setzt man nun im ersten Verhältnisse $1\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4}$, so beziehen sich auf $1\frac{1}{2}$ Ellen Breite x, auf $1\frac{3}{4}$ Ellen Breite aber 10 Ellen. Es entsteht demnach die Proportion:

$$1\tfrac{1}{2} : 1\tfrac{3}{4} = 10 : x$$
$$1\tfrac{1}{2}\,x = 17\tfrac{1}{2}$$
$$x = 17\tfrac{1}{2} : 1\tfrac{1}{2} = \tfrac{35}{2} : \tfrac{3}{2}$$
$$= \frac{35}{2} \times \frac{2}{3} = \tfrac{35}{3} = 11\tfrac{2}{3}$$

Zwölftes Hauptstück.

Von den Progressionen.

§. 208.

Setzt man zu den drei Gliedern einer stätigen Proportion noch ein viertes, fünftes, oder noch mehrere Glieder, so daß die Verhältnißexponenten zwischen jedem vorausgehenden und dem zunächst folgenden Gliede immer dieselben bleiben, so entsteht eine Progression, und zwar eine arithmetische, wenn die Verhältnisse lauter arithmetische; eine geometrische, wenn die Verhältnisse lauter geometrische sind. Ferner ist die Reihe zunehmend, wenn immer das folgende Glied größer ist, als das zunächst vorhergehende; abnehmend, wenn immer das folgende Glied kleiner ist als das zunächst vorhergehende.

$$2 \overset{3}{—} 5 \overset{3}{—} 8 \overset{3}{—} 11 \overset{3}{—} 14 \overset{3}{—} 17 \ldots$$

$$4 \overset{2}{:} 8 \overset{2}{:} 16 \overset{2}{:} 32 \overset{2}{:} 64 \overset{2}{:} 128 \ldots\ldots$$

Ersteres ist eine arithmetische Reihe oder Progression; letzteres ist eine geometrische Reihe oder Progression.

Bezeichnet man in einer arithmetischen Reihe das erste Glied durch a, die Differenz oder den Verhältnißexponenten durch d, so ist der allgemeine Ausdruck für eine arithmetische Reihe:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d \ldots$$

Bezeichnet man in der geometrischen Reihe das erste Glied durch a, den Quotienten oder Verhältnißexponenten durch q, so ist der allgemeine Ausdruck für eine geometrische Reihe:

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, aq^6 \ldots.$$

§. 209.

In jeder arithmetischen Reihe ist das letzte Glied gleich dem ersten und der so vielfachen Differenz als Glieder vorangehen. Es ist also in einer Reihe von n Gliedern, das letzte Glied $u = a + (n-1)\,d$

Denn man betrachte eine arithmetische Reihe

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ a+5d\ldots$$

Man sieht, daß das zweite Glied gleich sey dem ersten $+ d$ (Ein d, weil nur Ein Glied vorhergeht); daß dritte = dem ersten $+ 2d$ u. s. w.

§. 210.

In jeder arithmetischen Reihe ist die Summe jeder zwei vom ersten und letzten gleichweit abstehenden Glieder der Summe des ersten und letzten Gliedes gleich.

Denn man betrachte die Reihe $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ a+5d,\ a+6d\ \ldots$

$$a + a + 6d = 2a + 6d$$
$$a + d + a + 5d = 2a + 6d$$
$$a + 2d + a + 4d = 2a + 6d$$
$$(a + 3d)\,2 = 2a + 6d$$

Man sieht zugleich, daß bei einer ungeraden Zahl von Gliedern das doppelte Mittelglied gleich sey der Summe des ersten und letzten Gliedes.

§. 211.

In jeder arithmetischen Reihe ist die Summe aller Glieder gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes multiplizirt mit der halben Anzahl der Glieder. Wenn nun a das erste, u das letzte Glied, S die Summe und n die Anzahl aller Glieder bezeichnet, so ist

$$S = (a + u)\,\frac{n}{2}$$

Denn nach §. 210. ist die Summe jeder zwei vom ersten und letzten Gliede gleich weit abstehenden Glieder der Summe des ersten und letzten Gliedes gleich; also $= a + u$.

Ferner ist die Anzahl aller dieser Paare offenbar

$$\frac{n}{2}$$

Endlich erhält man offenbar die Summe der ganzen Reihe, wenn man die Summe eines der genannten Paare mit der Anzahl der Paare multiplizirt; also ist

$$S = (a + u)\,\frac{n}{2}$$

§. 212.

Aus den beiden Gleichungen

$$u = a + (n - 1)\,d \quad (\text{§. 209.})$$

$$S = (a + u)\,\frac{n}{2} \quad (\text{§. 211.})$$

lassen sich von den fünf Stücken a, u, d, n, S, wenn deren drei bekannt sind, die übrigen zwei durch Rechnung finden. (Siehe Tabelle §. 216.)

§. 213.

Jedes Glied einer geometrischen Reihe ist ein Produkt aus dem ersten Gliede multiplizirt mit einer Potenz des Quotienten, deren Exponent so viele Einheiten enthält, als Glieder vorhergehen. Wenn nun das erste Glied $= a$, der Quotient $= q$ ist, so ist das nte Glied, welches auch als letztes gelten kann $= aq^{n-1}$

Denn man betrachte die Reihe: a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, aq^6 . . . so findet man, daß das zweite Glied $= a \times q^1$ (weil nur Ein Glied vorausgeht; daß das dritte Glied $= a \times q^2$ (weil 2 Glieder vorausgehen) u. s. w.

§. 214.

Bezeichnet n die Anzahl der Glieder, a das erste, u das letzte Glied, q den Exponenten, S die Summe der Glieder einer Reihe, so ist:

$$S = \frac{q^n a - a}{q - 1} = \frac{qu - a}{q - 1}$$

1.) Denn nach §. 213. ist $u = q^{n-1} a = \frac{q^n a}{q}$ (§. 166.) also $qu = q^n a$

2.) Ferner ist:

$$S = a + qa + q^2 a + q^3 a + q^4 a \ldots + q^{n-2} a + q^{n-1} a$$
$$qS = aq + q^2 a + q^3 a + q^4 a + q^5 a \ldots + q^{n-1} a + q^n a$$

$$qS - S = q^n a - a$$
$$(q - 1) S = q^n a - a$$

$$S = \frac{q^n a - a}{q-1} = \frac{qu - a}{q-1} \text{ (lit. 1.)}$$

§. 215.

Aus den beiden Gleichungen

$$u = q^{n-1} a \text{ (§. 213.)}$$
$$S = \frac{qu - a}{q - 1} \text{ (214.)}$$

lassen sich von den 5 Stücken a, u, q, n, S, wenn drei davon gegeben sind, die übrigen 2 durch Rechnung finden. (Sieh Tabelle §. 217.)

§. 216.

Formeln zur Bestimmung der Werthe von a, d, n, u, S in einer arithmetischen Reihe.

Zu suchen	Gegeben	Nr.	Formeln.
u	a, d, n	1	$u = a + dn - d$
	a, n, s	2	$u = \frac{2S}{n} - a$
	d, n, S	3	$u = \frac{S}{n} + \frac{dn - d}{2}$
	a, d, S	4	$u = -\frac{d}{2} + \sqrt{\left(2dS + a^2 - ad + \frac{d^2}{4}\right)}$
S	a, n, u	5	$S = (a + u)\,\frac{n}{2}$
	a, d, n	6	$S = an + \frac{dn}{2}\,(n - 1)$
	a, d, u	7	$S = \frac{a + u}{2} + \frac{(u + a)(u - a)}{2d}$
	u, d, n	8	$S = un - \frac{nd}{2}\,(n - 1)$
d	a, u, n	9	$d = \frac{u - a}{n - 1}$
	a, n, S	10	$d = \frac{2S - 2an}{n\,(n - 1)}$
	a, u, S	11	$d = \frac{(u + a)(u - a)}{2S - u - a}$
	u, n, S	12	$d = \frac{2nu - 2S}{n\,(n - 1)}$

Zu suchen	Gegeben	Nr.	Formeln.
n	a, u, d	13	$n = 1 + \frac{u - a}{d}$
	a, u, S	14	$n = \frac{2S}{a + u}$
	a, d, S	15	$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2S}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d}\right)}$
	u, d, S	16	$n = \frac{1}{2} + \frac{u}{d} + \sqrt{\left(\frac{u^2}{d^2} + \frac{u}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2S}{d}\right)}$
a	u, d, n	17	$a = u + d - dn$
	u, n, S	18	$a = \frac{2S}{n} - u$
	u, d, S	19	$a = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(u^2 + du + \frac{d^2}{4} - 2dS\right)}$
	d, n, S	20	$a = \frac{S}{n} - \frac{d}{2}(n - 1)$

§. 217.

Formeln zur Bestimmung der Werthe von a, q, n, S, u in einer geometrischen Reihe.

Zu suchen.	Gegeben.	Nr.	Formeln.
u	a. q, n	1	$u = aq^{n-1}$
	a, q, S	2	$u = \frac{a + (q-1)S}{q}$
	q, n, S	3	$u = \frac{q^{n-1}(q-1)S}{q^n - 1}$
	a, n, S	4	$u.\ (S-u)^{n-1} - a.\ (S-a)^{n-1} = 0$

Zu suchen	Gegeben.	Nr.	Formeln.
S	a, q, u	5	$S = \frac{uq - a}{q - 1}$
	a, q, n	6	$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$
	q, n, u	7	$S = \frac{u(q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)}$
	a, n, u	8	$S = \frac{u^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{u^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$
a	q, n, u	9	$a = \frac{u}{q^{n-1}}$
	q, u, S	10	$a = uq - (q-1)S$
	q, n, S	11	$a = \frac{(q-1)S}{q^n - 1}$
	n, u, S	12	$a.(S-a)^{n-1} - u(S-u)^{n-1} = 0.$
q	a, n, u	13	$q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$
	a, u, S	14	$q = \frac{S - a}{S - u}$
	a, n, S	15	$q^n - \frac{S}{a} q + \frac{S - a}{a} = 0$
	n, u, S	16	$q^n - \frac{S}{S-u} q^{n-1} + \frac{u}{S-u} = 0$

Zu suchen.	Gegeben.	Nr.	Formeln.
	a, q, u	17	$q^n = \frac{uq}{a}$
	a, u, S	18	$\left(\frac{S-a}{S-u}\right)^{n-1} = \frac{u}{a}$
n	q, u, S	19	$q^n = \frac{uq}{uq - (q-1)S}$
	a, q, S	20	$q^n = \frac{a + (q-1)S}{a}$

§. 218.

Aufgabe. Ein Stein fällt von einem Thurme während 5 Sekunden auf den Boden. Wie hoch ist der Thurm?

Auflösung. Aus der Erfahrung weiß man, daß ein Körper im freien Falle in der ersten Sekunde beinahe 15 Pariser Fuß, in der zweiten 45, in der dritten 75 u. s. w. zurücklege; daß mithin die durchlaufenen Räume eine arithmetische Reihe bilden, wo $a = 15$, $d = 30$, $n = 5$ ist. S ist also die Summe aller durchlaufenen Räume oder die Höhe des Thurmes. Nach §. 216. Nr. 6. ist

$$S = an + \frac{dn}{2}(n-1)$$

Setzt man in dieser Gleichung die bekannten Werthe von a, d, n, so ist

$$S = 15 \cdot 5 + \frac{30 \cdot 5}{2}(5-1) = 75 + \tfrac{150}{2} \times 4$$
$$= 75 + 300 = 375.$$

Diese Aufgabe ließe sich übrigens auch durch eine geometrische Proportion lösen; es ist nämlich auch bekannt, daß sich die zurückgelegten Räume geomet-

risch verhalten wie die Quadrate der Fallzeiten. Demnach entsteht die Proportion:

$$15 : x = 1^2 : 5^2$$

$$x = 15 \times 25 = 375$$

§. 219.

Aufgabe. Jemand ließ eine große Grube graben. Den ersten Fuß tief zu graben bezahlte er 2 fl., den zweiten Fuß tief 4 fl., den dritten Fuß tief 6 fl., und so kostete jeder folgende Fuß immer um 2 fl. mehr, als der zunächst vorausgehende. Wie tief wurde gegraben, wenn das Graberlohn im Ganzen 110 fl. betragen hat?

Auflösung. Man sieht, daß das Graberlohn für den ersten, zweiten, dritten u. s. w. Schuh eine arithmetische Reihe bildet, in welcher $a = 2$, $d = 2$ ist. Zugleich kennt man die Summe, S, aller Glieder, welche $= 110$ ist. Nur die Anzahl der Fuß (der Glieder), oder n ist unbekannt. Nun ist nach §. 216. Nr. 15.

$$n = \tfrac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2S}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \tfrac{1}{4} - \frac{a}{d}\right)}$$

Setzt man in dieser Gleichung die bekannten Werthe von a, d, S, so ist:

$$n = \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 110}{2} + \tfrac{4}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{2}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{2} - 1 + \sqrt{(110 + 1 + \tfrac{1}{4} - 1)}$$

$$= -\tfrac{1}{2} + \sqrt{110\tfrac{1}{4}} = -\tfrac{1}{2} + 10\tfrac{1}{2} = 10$$

Denn $\sqrt{1|10,25} = 10,5$

1
1025
205
1025
0

Es ist also 10 die Anzahl der Glieder; mithin ist die Grube 10 Fuß tief.

§. 220.

Aufgabe. Dem Erfinder des Schachspieles wurde zur Belohnung seiner Erfindung vom Schach von Persien die Bitte bewilligt, daß ihm für das erste Feld ein Weizenkörnchen, für das zweite 2, für das dritte 4, für das vierte 8, für das fünfte 16 u. s. w. gegeben werden sollten. Wie groß ist die Anzahl der geforderten Weizenkörner?

Auflösung. Man sieht, daß die Anzahl der Weizenkörner, welche er für die einzelnen Felder verlangte, nämlich: 1, 2, 4, 16 u. s. w. eine geometrische Reihe bilden, in welcher $a = 1$, $q = 2$, $n = 64$ ist. (Das Schachbrett hat nämlich 64 Felder). Die Summe, S, aller Glieder ist nun zu suchen. Nach §. 217. Nr. 6. ist

$$S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Setzt man in obiger Gleichung statt a, q, n die dafür bekannten Werthe, so ist:

$$S = \frac{1\,(2^{64} - 1)}{2 - 1} = \frac{2^{64} - 1}{1} = 2^{64} - 1$$

$$2^2 = 4$$

$$2^4 = 2^2 \times 2^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

$$2^8 = 2^4 \times 2^4 = 16 \times 16 = 256$$

$$2^{16} = 2^8 \times 2^8 = 256 \times 256 = 65536$$

$$2^{32} = 2^{16} \times 2^{16} = 65536 \times 65536 = 4294967296$$

$$2^{64} = 2^{32} \times 2^{32} = 4294967296 \times 4294967296$$

$$= 18'''446,744''073,709'551,616$$

Also $S = 18'''446,744''073,709'551,615$ Körner.

*Da auf das Münchner Schäffel mittleren Weizens ungefähr 6'555,690 Körner gerechnet werden können, so beträgt die ganze bewilligte Summe 2''813,852'405,118 Münchner Schäffel. Würde man nun täglich eine Million, mithin jährlich 365 Millionen Schäffel entrichten, so würden doch mehr als 7709 Jahre zur Abzahlung erforderlich seyn.

Dreizehntes Hauptstück.

Von den Logarithmen.

§. 221.

Wenn man jede Zahl m als eine Potenz von einer und derselben Zahl b, die nicht 1 ist, betrachtet, so heißt der Exponent der Potenz der Logarithmus der Zahl m. d. i. wenn $m = b^x$, so ist x der Logarithmus von m.

Den Logarithmus einer Zahl m bezeichnet man dadurch, daß man ihr log. oder auch nur l. vorsetzet, d. i. wenn $m = b^x$, so ist $\log. m = x$.

Die Zahl b heißt die Grundzahl oder Basis.

Die Logarithmen, die einer jeden Zahl bei dem ein für allemal bestimmten Werthe der Basis b zukommen, machen ein logarithmisches System aus. Ist der Werth von b = 10, so ist dieß das gemeine oder briggische System. Nach diesem Systeme ist $\log. 10 = 1$, $\log. 100 = 2$, $\log. 1000 = 3$ u. s. w.

Denn $10 = 10^1$
$100 = 10^2$
$1000 = 10^3$

*Die zu jeder Zahl gehörigen Logarithmen findet man in „Vega's logarithmisch-trigonometrischem Handbuche." Leipzig in der Weidmann'schen Buchhandlung. Darin ist auch eine genaue, sehr leicht faßliche Anweisung über den Gebrauch der logarithmischen Tafeln enthalten.

§. 222.

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren; d. i.

$$\log. mn = \log. m + \log. n$$

Denn man nehme an, m sey gleich b^x, und n sey gleich b^y, so ist x der Logarithmus von m, und y der Logarithmus von n.

Da nun $mn = b^x \times b^y = b^{x+y}$ (§. 159.), so ist $\log. mn = x + y = \log. m + \log. n$.

§. 223.

Man erhält den Logarithmus eines Quotienten, wenn man von dem Logarithmus des Dividend den Logarithmus des Divisors subtrahirt; d. i.

$$\log. \frac{m}{n} = \log. m - \log. n.$$

Denn man nehme an, m sey gleich b^x und n sey gleich b_y, so ist x der Logarithmus von m, und y der Logarithmus von n. Da nun $m : n = b^x : b^y = b^{x-y}$ (§. 162.), so ist

$$\log. \frac{m}{n} = x - y = \log. m - \log. n$$

*Da man nach §. 32. den Zähler eines jeden Bruches als ein Dividend, und seinen Nenner als einen Divisor betrachten kann, so erhält man den Logarithmus eines Bruches, wenn man vom Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

§. 224.

Der Logarithmus von der Potenz einer Zahl ist ein Produkt aus dem Logarithmus der Zahl in den Exponenten der Potenz; d. i.

$$\log. m_n = n \times \log. m$$

Denn man nehme an, m sey gleich b_x, so ist x der Logarithmus von m.

Da nun $m^n = (b^x)_n = b^{x.n}$ (§. 167.), so ist $\log. m^n = x \times n = \log. m \times n$.

§. 225.

Der Logarithmus einer Wurzel ist dem Quotienten gleich, den man erhält, wenn man den Logarithmus der Zahl durch den Wurzelexponenten dividirt; d. i.

$$\log. \sqrt[n]{m} = \frac{\log. m}{n}$$

Denn man nehme an, es sey $m = b^x$, so ist x der Logarithmus von m.

Da nun $\sqrt[n]{m} = \sqrt[n]{b^x} = b^{\frac{x}{n}}$ (§. 168.), so ist $\log. \sqrt[n]{m} = \frac{x}{n} = \frac{\log. m}{n}$

Anwendung der Logarithmen.

§. 226.

Aufgabe. Es soll 5784 mit 268 mittelst der Logarithmen multiplizirt werden.

Auflösung. $5784 \times 268 = \log. 5784 + \log. 268 = 3,7622283 + 2,4281348 = 6,1903631 = \log. 1550112.$

Es ist also

$$5784 \times 268 = 1550112.$$

§. 227.

Aufgabe. Es soll 118172 durch 953 mittelst der Logarithmen dividirt werden.

Auflösung. $118172 : 953 = \log. 118172 - \log. 953 = 5,0725146 - 2,9790929 = 2,0934217 = \text{lcg}, 124.$

Es ist also

$$118172 : 953 = 124.$$

§. 228.

Aufgabe. Es soll 34 mit Hilfe der Logarithmen zur 4ten Potenz erhoben werden.

Auflösung. $34^4 = \log. 34 \times 4 = 1{,}5314789 \times 4 = 6{,}1259156 = \log. 1336336.$

Es ist also $34^4 = 1336336.$

§. 229.

Aufgabe. Es soll aus 7301 mittelst der Logarithmen die Quadratwurzel gezogen werden.

Auflösung. $\sqrt{7301} = \log. 7301 : 2 = 3{,}8633823 : 2 = 1{,}9316911 = \log. 85{,}45-$

Es ist also $\sqrt{7301} = 85{,}45-$

Das Zeichen (—) bedeutet, daß die Wurzel etwas doch unter $\frac{1}{100}$ zu groß ist.

§. 230.

Aufgabe. Es soll aus 7301 die Cubikwurzel mittelst der Logarithmen gezogen werden.

Auflösung. $\sqrt[3]{7301} = \log. 7301 : 3 = 3{,}8633823 : 3 = 1{,}2877941 = \log. 19{,}40 -$

Es ist also

$$\sqrt[3]{7301} = 19{,}40 -$$

Berechnung der Zinseszinsen mittelst der Logarithmen.

§. 231.

Ein Kapital a zu p Prozenten ausgeliehen, beträgt sammt dem Interesse b nach einem Jahre

$$\frac{100 + p}{100} a$$

Denn nach §. 83. findet man die Interessen eines Kapitals für Ein Jahr, wenn man letzteres mit den Prozenten multiplizirt, und mit 100 dividirt. Die Interessen b des Kapitals sind also gleich $\frac{a \times p}{100}$ mithin ist das Kapital sammt den Interessen

$$= a + \frac{a \times p}{100} = \frac{100a + ap}{100} = \frac{100 + p}{100} a.$$

§. 232.

Ein Kapital a zu p Prozenten ausgeliehen, beträgt nach n Jahren, sammt den Zinseszinsen:

$$\left(\frac{100+p}{100}\right)^n a \text{ oder } S = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n a$$

Denn nach dem ersten Jahre ist das Kapital sammt den Interessen

$$= \frac{100+p}{100} a \text{ (§. 231.)}$$

Betrachtet man nun $\frac{100+p}{100}a$ als Kapital, so trägt dieß nach dem zweiten Jahre an Interessen

$$\frac{100+p}{100} a \times \frac{p}{100} = \frac{100a+ap}{100} \times \frac{p}{100} = \frac{100ap+ap^2}{10000}$$

es ist folglich nach dem zweiten Jahre das Kapital $\frac{100+p}{100}a$ sammt den Interessen $\frac{100ap+ap^2}{10000} =$

$$\frac{100+p}{100}a + \frac{100ap+ap^2}{10000}$$

$$= \frac{100a+ap}{100} + \frac{100ap+ap^2}{10000}$$

$$= \frac{10000a+100ap+100ap+ap^2}{10000}$$

$$= \frac{10000+200p+p^2}{10000} a = \left(\frac{100a+p}{100}\right)^2 a$$

Aus denselben Gründen ist das Kapital sammt den Interessen nach dem dritten Jahre $\left(\frac{100+p}{100}\right)^3 a$

nach dem vierten Jahre $\left(\frac{100+p}{100}\right)^4$ a u. s. w.

Es wird also auch das Kapital sammt den Interessen nach n Jahren gleich

$$\left(\frac{100+p}{100}\right)^n a$$

§. 233.

Aufgabe. Was werden 100 fl. zu 5 Prozent in 20 Jahren?

Auflösung. Nach §. 232.

$$\left(\frac{100+5}{100}\right)^{20} 100 = \left(\frac{105}{100}\right)^{20} 100 = \left(\frac{21}{20}\right)^{20} 100$$

$= (\log. 21 - \log. 20)\ 20 + \log. 100 = (1,3222193 - 1,3010300)\ 20 + 2 = 0,0211893 \times 20 + 2 = 0,4237860 + 2 = 2,4237860 = \log. 265,33$

Es sind also 100 fl. zu 5 Prozent ausgeliehen, nach 20 Jahren sammt den Zinseszinsen 265 fl. 19 kr. 3 pf.

*Hätte man dieß nach §. 94. berechnen wollen, so hätte man 100 gerade 20mal mit 105 multipliziren, und vom Produkte 40 Zifferstellen abschneiden müssen. Man sieht, was für einen Vortheil das Rechnen mit Logarithmen gewährt.

§. 234.

Wenn die Summe bekannt ist, die man nach einer gewissen Anzahl von Jahren als den Betrag des Kapitals sammt Zinseszinsen erhalten hat, wenn ferner die Anzahl der Jahre und die Prozente bekannt sind, so ist das ausgelegte Kapital oder

$$a = S \times \left(\frac{100}{100+p}\right)^n$$

Denn nach §. 233. ist $S = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n a$;

mithin ist $S : \left(\frac{100+p}{100}\right)^n = a$

Es ist aber

$$S : \left(\frac{100+p}{100}\right)^n = S \times \left(\frac{100}{100+p}\right)^n;$$

folglich $a = S \times \left(\frac{100}{100+p}\right)^n$

§. 235.

Aufgabe. Wie groß muß ein Kapital seyn, welches zu 5 Prozent in 50 Jahren sammt Zinseszinsen 1000 fl. beträgt?

Auflösung. Nach §. 234. ist das Kapital oder $a = 1000 \times \left(\frac{100}{105}\right)^{50}$; log. a = log. 1000 + (log. 20 — log. 21) 50 = 3 + (1,3010300 — 1,3222193) 50 = 3 + (0,9788107 — 1) 50 = 3 + (48,9405350 — 50) = 3 + 0,9405350 — 2 = 1,9405350 = log. 87,204.

Das Kapital muß also 87 fl. 12 kr. 1 pf. betragen.

§. 236.

Wenn das Kapital nebst den Prozenten bekannt ist, und eben so auch die Summe, die das Kapital sammt den Zinseszinsen nach Verlauf einiger Zeit betragen hat, so ist die Anzahl der Jahre, oder

$$n = \frac{\log. S - \log. a}{\log. (100 + p) - \log. 100}$$

Denn nach §. 232. ist:

$$S = \left(\frac{100 + p}{100}\right)^n a$$

$$\frac{S}{a} = \left(\frac{100 + p}{100}\right)^n$$

$$\log. \left(\frac{S}{a}\right) = n \times \log. \left(\frac{100 + p}{100}\right) \text{ §. 224.}$$

$$\log. S - \log. a = n \times (\log. (100 + p) - \log. 100)$$

$$\frac{\log. S - \log. a}{\log. (100 + p) - \log. 100} = n$$

§. 237.

Aufgabe. Wie lange muß man 100 fl. zu 5 Prozent ausleihen, bis sie sammt den Zinseszinsen 1000 fl. betragen?

Auflösung. Nach §. 236. ist die Anzahl der Jahre, oder:

$$n = \frac{\log. 1000 - \log. 100}{\log. 105 - \log. 100}$$

$$n = \frac{3 - 2}{2{,}0211893 - 2}$$

$$n = \frac{1}{0{,}0211893} = 47{,}1936$$

Man muß also 100 fl. 47 Jahre, 2 Monate, 10 Tage lang zu 5 Prozent ausleihen, bis sie sammt Zinseszinsen 1000 fl. betragen.

§. 238.

Wenn das Kapital nebst den Jahren, und eben so auch die Summe bekannt ist, welche das Kapital nach Verlauf dieser Jahre sammt Zinseszinsen beträgt, so sind die Prozente oder:

$$\log. (100 + p) = \log. 100 + \frac{\log. S - \log. a}{n}$$

Denn nach §. 232. ist

$$S = \left(\frac{100 + p}{100}\right)^n a$$

$$\frac{S}{a} = \left(\frac{100 + p}{100}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{\frac{S}{a}} = \frac{100 + p}{100}$$

$$100 \sqrt[n]{\frac{S}{a}} = 100 + p$$

$$\log. 100 + \frac{\log. S - \log. a}{n} = \log. (100 + p)$$

§. 239.

Aufgabe. Zu wie viel Prozent muß man 100 fl. ausleihen, wenn sie in 20 Jahren sammt Zinseszinsen 265 fl. 19 kr. 3 pf. betragen sollen?

Auflösung. Nach §. 238. ist:

$$\log.(100 + p) = \log.\ 100 + \frac{\log.\ 265{,}33 - \log.100}{20}$$

$$\log.(100 + p) = 2 + \frac{2{,}4237864 - 2}{20}$$

$$= 2 + \frac{0{,}4237864}{20}$$

$$= 2 + 0{,}0211893$$

$$\log.(100 + p) = 2{,}0211893$$

$$\log.\ 105 = 2{,}0211893$$

$$\log.(100 + p) = \log.\ 105$$

$$100 + p = 105$$

Mithin muß man 100 fl. zu 5 Prozent ausleihen, wenn sie in 20 Jahren sammt Zinseszinsen 265 fl. 19 kr. 3 pf. betragen sollen.

Anhang.

Von den in Bayern üblichen Maßen, Gewichten und Münzen.

Erste Abtheilung.

Vom Maße.

I. Vom Längenmaße.

A. Vom Längenmaße überhaupt.

1.) Um eine Länge zu bestimmen, bedient man sich verschiedener Maße, eines Fußes, einer Elle, einer Klafter, einer Meile, je nachdem die zu bestimmende Länge kleiner oder größer ist.

2.) Gesetzlich gelten für die sämmtlichen bayerischen Staaten (Regierungsbl. XX. Stück den 11. März 1809) nachstehende Bestimmungen:

a) für das Längenmaß ist der altbayerische Fuß die Einheit, der Fuß ist in 12 Zolle, der Zoll in 12 Linien getheilet; dieser bayerische Fuß ist, bei + 13° Reaumur = Scale, = 129,38 Duodecimallinien des Pariser Fußes;

b) die Klafter hält 6 bayerische Fuß;

c) die geometrische Ruthe ist 10 bayer. Fuß lang;

d) die bayerische Elle hält 2 bayer. Fuß und $10\frac{1}{4}$ Zoll; eine solche bayerische Elle ist daher = 309,272 Pariser Linien.

B.

Eintheilung des Fußmaßes überhaupt.

a. Im Duodecimalmaße.

Fuß	Zoll	Linien	Scrupl
1 Fuß	12	144	1728
	1 Zoll	12	144
		1 Linie	12
			Scrupl

b. Im Decimalmaße.

Fuß	Zoll	Linien	Scrupl
1 Fuß	10	100	1000
	1 Zoll	10	100
		1 Linie	10
			Scrupl

C.

Vergleichung der bayerischen Längenmaße mit einigen ausländischen.

Ein bayerischer Fuß hält 129,38 französische Linien, oder 11,492 englische Zoll, und ist = 0,29185 französischen Meter, oder 2,9185 niederländischen Palmen. Ueberhaupt geben 100 bayerische Fuß

100,920	Bremer	Fuß	89,847	Pariser	Fuß
92,995	Dänische	=	92,992	Rheinländische	=
95,766	Englische	=	95,766	Russische	=
101,874	Hamburger	=	98,313	Schwedische	=
103,256	Leipziger	=	92,330	Wiener	=
101,874	Würtemberger	=	92,992	Berliner	=

Die bayerische Elle hält 369,272 Pariser Linien oder 32,8 englische Zoll; mithin geben 100 bayer. Ellen.

137,021	Augsburger große oder Leinwand-Ellen.
141,321	= kleine oder Barchent-Ellen.
118,889	Amsterd. Brab. Ellen
119,970	Antwerpner =
138,823	Baden'sche =
124,901	Berliner =
145,956	Braunschweiger =
144,021	Bremer =
138,833	Darmstädter =
121,510	Leipz. Brab. =
91,110	Londner Yards
140,034	Mailänder Braccia
83,301	Niederländische Ellen
117,079	Russische Arschinen
142,740	Florenzer Braccia
152,201	Frankfurter Ellen
83,301	Französische Meter
69,418	= Aunes
145,381	Hamburger Ellen
132,711	Kopenhagner =
147,354	Leipziger =
140,300	Schwedische =
98,236	Spanische Varas
138,096	Turiner Ellen
106,910	Wiener =
135,617	Würtemberger =

D.

Vom Meilenmaße.

1.) Das größte übliche Längenmaß ist die Meile, und zwar in Deutschland die geographische, oder so-

genannte deutsche Meile, deren 15 einen Meridian-Grad ausmachen.

2.) Hr. v. Riedl in der Einleitung zu seinem bayerischen Atlas nimmt die deutsche Meile für Bayern 22826,6 Pariser Fuß = 25400 bayer. Fuß, mithin eine sogenannte Stunde zu 12703 bayer. Fuß, und in dieser Entfernung von einander wurden die bayerischen Chaussee-Stundensäulen gesetzt. Ehemals betrug die Entfernung solcher Stundensäulen von einander 13000, mithin die alte Chaussee-Meile 26000 bayer. Fuß.

E.

Größe verschiedener Meilen nach dem Pariser Fußmaß.

Namen der Meilen in verschiedenen Ländern.	Jede Meile hält Pariser Fuß.
Bayerische Chaussee-Meile	22826,6
Böhmische " "	21270,0
Dänische " "	23197,2
Deutsche alte " "	13722,1
Neue kleine " "	19330,9
Französische neue Lieues $\frac{1}{25}$ Gr.	13681,97
Neue Seemeilen von $\frac{1}{20}$ Gr.	17102,47
Neue von $\frac{1}{20}$ Centesimalgrad	15392,22
Großbrittanische alte	7206,75
Großbrittanische neue zu 1760 Yards	4963,23
Seemeilen	5717,13
Holländische	18055,12
Italienische	5717,13
Jüdische alte, Sabatherweg zu 200 jüd. biblischen Ellen	3403,22
Londner von 1666⅔ Yards	4699,39
Oesterreichische Postmeilen	23355,00
Preußische	23873,76

Namen der Meilen in verschiedenen Ländern.	Jede Meile hält Pariser Fuß.
Portugiesische	19057,44
Römische zu 8 olymp. Stad.	4543,75
Russische Meilen oder Wersta	3288,20
Sächsische Polizeimeilen	27912,00
Schwedische	32953,50
Schweizerische	25795,25
Spanische	12882,00
Stadien griechisch-olymp.	571,23
Türkische gewöhnliche, oder Berri	5144,94
Seemeilen	4039,21
Ungarische	25734,35

II.

Vom Flächenmaße.

1.) Kleinere Flächen werden durch Quadratfuße, Quadratzolle u. s. w., das ist, durch Quadrate gemessen, wovon jede Seite einen Fuß oder einen Zoll hält.

2.) Bei größern Flächen dient zum Maße das Jauchert oder Tagwerk, welches in Bayern nach einem Gesetze vom Jahre 1616 genau 40000 bayerische Quadratfuß hält.

3.) Das größte Flächenmaß ist endlich die Quadratmeile, deren Größe sowohl, als die Verhältnisse in verschiedenen Ländern aus der vorhergehenden Tabelle bestimmt werden können.

Eintheilung des Quadratfußes.

a. Im Duodecimalmaße.

Q. Fuß.	Q. Zoll	Q. Linien.	Q. Scrupel.
1	144	20736	2985984
	1.	144	20736
		1.	144
			Q. Scrupel.

b. Im Decimalmaße.

Fuß.	Q. Zoll.	Q. Linien.	Q. Scrupel.
1.	100	10000	1000000
	1.	100	10000
		1.	100
			Q. Scrupel.

III.

Vom Körpermaße.

Zum Körpermaße dienen:

1.) Der Cubikfuß.

2.) Die Cubikmeile, welche das größte Körpermaß ist.

3.) Die Klafter als Holzmaß, welche in Bayern 6 Schuh im Quadrate hält, und wo die Scheiter $3\frac{1}{2}$ bayer. Schuh lang seyn sollen, so, daß also eine Klafter Holzmaß 126 Cubikfuß hält.

4.) Verschiedene Früchtenmaße, als Getreid=, Getränkmaß.

5.) Einige Körper werden nur gezählt, z. B. das Papier.

6.) Einige hingegen nach dem Gewichte bestimmt.

A. Eintheilung des Cubikfußes.

a. Im Duodecimalmaße.

Cubikfuß.	Cubikzoll.	Cubiklinien.	Cubikscrupel.
1	1728	2985984	5159780352
	1	1728	2985984
		1	1728

b. Im Decimalmaße.

Cubikfuß.	Cubikzoll.	Cnbiklinien.	Cubikscrupel.
1	1000	1000000	1000000000
	1	1000	1000000
		1	1000

B Bayerisches Getränkmaß.

Vermöge einer k. Verordnung vom Jahre 1809 (Königl. Regierungsbl. XX. Stück den 11. März 1809) ist im ganzen Königreiche Bayern, die Maßkanne, welche 43 bayer. Dec. Cubikzoll hält, als Einheit für die Flüssigkeiten festgesetzt.

C. Verhältniß des bayerischen Getränk-Maßes zu verschiedenen ausländischen Maßen.

Die bayerische Maß, deren 60 einen bayerischen Eimer machen, (der Visier-Eimer, wie er an die Wirthe abgegeben wird, hält 64 Maß), hält 43 bayer. Dez. Cubikzoll, oder 53,892 franzöſ. Cubikzoll. Die Maß hält 2 halbe Maß oder Seidel à 2 Quartel.

Ueberhaupt geben 100 bayerische Maß

71,268	Baden'sche Maß
93,363	Berliner Quart.
114,178	Dresdner Kannen
59,625	Frankfurter Aichmaß.
106,902	französische Liter.
118,119	Hamburger Quartier.
110,661	Kopenhagner Pott.
23,536	Londner Gallons.
106,902	Niederländische Kannen.
75,548	Wienermaß.
55,753	Würtemberger Trübaichmaß.
58,192	= Hellaichmaß.
64,011	= Schenkmaß.

*Der Würtembergische Eimer, sowohl Trüb = als Hellaich, hält 160 Maß. 160 Trübaichmaß sind 167 Hellaichmaß, und 10 Hellaichmaß sind 11 Schenkmaß.

D. Bayerisches Getreidmaß.

Als Getreidemaß dient das Schäffel, dessen Größe gesetzmäßig 208 bayer. Maß oder 8944 bayer. Dezimal Cubikzoll oder 15455,232 bayer. Duodezimal Cubikzoll oder 11209,598 französische Duodezimal-Cubikzoll beträgt.

E. Eintheilung des bayerischen Getreid-Maßes.

Schäffel.	Metzen.	Viertl $\frac{1}{2}$ Metzen.	$\frac{1}{2}$ Viertl $\frac{1}{4}$ Metzen.	Viertling $\frac{1}{8}$ Metzen.	$\frac{1}{2}$ Viertling $\frac{1}{16}$ Metzen.	Dreißiger $\frac{1}{32}$ Metzen.	$\frac{1}{2}$ Dreißiger $\frac{1}{64}$ Metzen.
1 Schäffel.	6	12	24	48	96	192	384
	1 Metzen	2	4	8	16	32	64
		1 Viertel oder $\frac{1}{2}$ Metzen.	2	4	8	16	32
			$\frac{1}{2}$ Viertl oder $\frac{1}{4}$ Metzen.	2	4	8	16
				1 Viertling od. $\frac{1}{8}$ Metz.	2	4	8
					$\frac{1}{2}$ Viertling od. $\frac{1}{16}$ Metz.	2	4
						1 Dreißiger od. $\frac{1}{32}$ Metz.	2
							$\frac{1}{2}$ Dreißiger od. $\frac{1}{64}$ Metz.

*Das Kalkmaß ist der Metzen, deren 24 eine Muth sind. Steinkohlen werden beim Bergbau nach Kübeln zu 1 ¹/₂, auch nach Seideln zu 6 Cubikfuß (ungefähr 4 Metzen); im gewöhnlichen Verkehr in Fässern von 7 Kübeln auch pr. Zentner verkauft. Eisenerze mißt man nach Seideln von 5 bis 6 Cubikfuß.

F. Vergleichung des bayerischen Schäffels mit mehreren ausländischen.

Ein bayerisches Schäffel beträgt:

2,8149 Antwerpner Viertel.
4,0455 Berliner Schäffel.
3,0018 Bremer Schäffel.
7,7517 Frankfurter Simmer.
2,2234 Franz. Hektoliter.
2,1101 Hamburger Schäffel.
4,1149 Lissaboner Fanegas.
0,7649 Londner Quarter.
3,9461 Cadixer Fanegas.
1,5983 Dänische Tonnen.
2,0696 Dresdner Schäffel.
2,2234 Niederländische Sack.
1,1428 Russische Tschetwert.
3,8906 Spanische Fanegas.
1,3488 Schwedische Tonnen.
3,6158 Wiener Metzen.
10,0371 Würtemberger Simri, (deren 8 ein Würtemberger Schäffel) oder 1,2546 Würtemb. Schäffel.

G. Eintheilung des Papiermaßes.

Ballen.	Riß.	Buch.	Bogen Schreibpap.	Bogen Drukpapier
1 Ballen	10	200	4800	5000
	1 Riß	20	480	500
		1 Buch	24	25
			Bogen Schreibpap.	Bogen Druckpap.

Zweite Abtheilung.

Vom Gewichte.

Darüber haben wir in Bayern folgende gesetzliche Bestimmungen:

a) Für das Handelsgewicht bleibt in der Folge das Münchner- oder bayerische Pfund die Einheit, und ein solches Pfund kömmt 560 Grammes des französischen Gewichtes gleich (k. b. Regierungsbl. XX. St. den 11. März 1809.)

b) „Das Apothekergewicht, welches gegenwärtig 7445 holl. Asen (mithin beinahe 358 Grammes) schwer ist, soll um 2 Grammes, oder den 179ten Theil seines Gewichtes vermehrt werden, wodurch es 360 Grammes schwer wird, das künftige Apothekerpfund verhält sich also zu dem bürgerlichen = 360 : 560 = 9 : 14; d. i. 9 Civilpfunde geben künftig genau vierzehn Apotheker-Pfunde.“ Die Einführung dieses Gewichtes soll mit dem 1. Juli 1811 Statt haben. (K. B. Regierungsbl. X. St. den 6. Febr. 1811.)

c) Das bei dem Conventions-Münzfuß zur Ausmünzung übliche Kölnergewicht, und

d) das bisher schon in dem größten Theile von Bayern als Silbergewicht gebrauchte Wiener-Markgewicht, welches mit dem Kölner in dem bekannten Verhältnisse = 6 : 5 (sollte heißen wie 5 : 6 denn 5 Wiener- geben 6 Kölner-Mark), steht, soll noch ferner im Gebrauche bleiben, und dieses auch an allen Orten mit Ausnahme der Stadt Augsburg (in Augsburg hat man nämlich ein eigenes Gold- und Silbergewicht, wovon 119 Mark = 120 Mark Kölnisch; Gold verkauft man gewöhnlich nach der Kölnischen, Silber nach der Augsburger Mark,) als Silbergewicht eingeführt werden. (K. B. Regierungsbl. XXXI. St. den 11. Mai 1811.)

Diesen Bestimmungen zufolge hält also

a) das bayer. Pfund Handelsgewicht 11655,168 hol. As;

b) das neue Apothekergewicht 7492,608 hol. As;

c) das bayer. Münzgewicht, oder die Kölnermark 4867,5 hol. As;

d) das Silbergewicht, die Wienermark = $\frac{6}{5}$ Kölnermark zu 16 Loth 5831 hol. As; mithin das ganze Pfund zu 2 Mark 11682 hol. As.

A.

Eintheilung des bayerischen Handelsgewichts.

Cent.	Pfund.	Unzen.	Loth.	Quintl.	Pfenning Gewicht.	Gran.
1 Cent.	100	1600	3200	12800	51200	768000
	1 Pfund	16	32	128	512	7680
		1 Unze	2	8	32	480
			1 Loth	4	16	240
				1 Quintl.	4	60
					1 Pf. Gew.	15
						Gran.

B.

Eintheilung des bayerischen und überhaupt des deutschen Apothekergewichts.

Pfund.	Unze.	Loth.	1 Drachma oder Quintl.	Scrupl.	Gran.
1 Pf.	12	24	96	288	5760
	1 Unze	2	8	24	480
		1 Loth	4	22	240
			1 Drachma oder Quintl.	3	60
				1 Scrupel	20
					Gran.

C.

Eintheilung des bayerischen Münzgewichtes, oder der Kölner-Mark.

Mark.	Unzen.	Loth.	Karat.	Quintl.	Pfenning	Gran.	Eschen oder As.	Richtpfenning.
1 Mark.	8	16	24	64	256	288	4352	65536
	1 Unze.	2	3	8	32	36	544	8192
		1 Loth.	$1\frac{1}{2}$	4	16	18	272	4096
			1 Karat.	$2\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3}$	12	$181\frac{1}{2}$	$2730\frac{2}{3}$
				1 Quintl.	4	$4\frac{1}{2}$	68	1024
					1 Pfenning.	$1\frac{1}{8}$	17	256
						1 Gran.	$15\frac{1}{9}$	$227\frac{5}{9}$
							1 As	$15\frac{1}{17}$
								Richtpfenning.

D.

Eintheilung des holländischen Troygewichtes.

Mark.	Unzen	Engel.	Fierl.	Troisk.	Deurșken	As.
1 Mark	8	160	640	1280	2560	5120
	1 Unze	20	80	160	320	640
		1 Engel	4	8	16	32
			1 Fierling	2	4	8
				1 Troiske	2	4
					1 Deurske	2
						As.

E.

Eintheilung des französischen Troygewichtes.
Poids de Marc.

Marc.	Once	Gros	Denier,	Grain.	Primes ou Carobes.
1 Marc.	8	64	192	4608	110592
	1 Once	8	24	576	13824
		1 Gros	3	72	1728
			1 Denier	24	576
				1 Grain	24
					Primes.

*Das ehemalige franz. bürgerliche Handelsgewicht enthielt die nämlichen Eintheilungen, so, daß ein Pfund oder Livre aus 2 Marcs, 16 Onces, 128 Gros, 384 Deniers, 9216 Grains, 221184 Primes bestand.

** Das Troygewicht bekam den Namen von Troyes in Champagne, wo ehedem sehr ansehnliche Jahrmärkte gehalten wurden, die Mark war anfänglich in Frankreich und Holland gleich; das holl. Troygewicht wird seit langer Zeit als Maßstab gebraucht, nach welchem die an verschiedenen Orten eingeführten Gewichte mit einander verglichen werden.

F.

Vergleichung des bayerischen Gewichtes mit verschiedenen ausländischen.

Das bayerische Pfund Handels*= Gewicht hält 560 französische Grammes oder 11655,168 holländische As, oder 8643 englische Grän. Ueberhaupt machen 100 bayer. Pfund

113,356	Amsterdamer	Pfund
112,002	Baden'sche	=
119,788	Berliner	=
119,842	Braunschweiger	=
112,318	Bremer	=
112,002	Darmstädter	=
112,130	Dänische	=
110,828	Frankf. schwere	=
119,694	= leichte	=
56,001	französische Kilogrammes.	
115,605	Hamburger Pfund.	
119,776	Leipziger	=
164,916	Livorner	=
123,471	Londner Avoir du poids	
115,536	Lübecker	Pfund
171,367	Mailänder leichte	=
56,001	Niederländer	=
136,900	Russische	=
132,222	Schwedische Victual	=
121,715	Spanische	=
151,731	Turiner	=
99,979	Wiener	=
119,788	Würtemberger	=

Dritte Abtheilung.

Von den Münzen.

A. Erklärungen von den Münzen überhaupt.

Man unterscheidet

a) reele oder gangbare Münzen, das ist, wirklich geprägte Geldstücke, z. B. Ducaten, Conventionsthaler u. s. w.

b) fingirte oder Rechnungsmünzen, wodurch als Maßstab der Werth der Dinge, und selbst der geprägten Münzen bestimmt wird, z. B. in Deutschland der Gulden, in England das Pfund Sterling u. s. w.

Um den Werth der reellen Münzen nach fingirten zu bestimmen, kömmt es

a) auf die Beschaffenheit, und

b) auf das Gewicht des in einer Münze enthaltenen Metalles an.

Das Gewicht des in einer Münze enthaltenen Metalls zu bestimmen, braucht man in ganz Deutschland das Cölner Markgewicht; man nennt daher

a) eine Mark von feinem Golde oder Silber eine feine Mark;

b) eine Mark des legirten edleren Metalles eine rauhe Mark.

Ferner heißt

a) das Gewicht einer Münzsorte ihr Schrot,

b) der Gehalt der Münze am edlern Metalle das Korn,

c) das Gesetz, wodurch Schrot, Korn und der Kaufwerth einer Münze bestimmt wird, der Münzfuß.

Die in Deutschland merkwürdigsten Münzfuße sind:

A. im Golde:

a) der rheinische Goldguldenfuß 72 Stück auf die rauhe Mark von 18 Karat 6 Grän Gold, und 3 Karat Silber; nach diesem Fuße sind die bayer. Karolinen und Maxd'ors geprägt.

b) Der Ducatenfuß, 67 Stück auf die feine Mark von 23 Karat 8 Grän Gold, und 2 Grän Silber.

B. In Silber:

a) der alte Reichsfuß von 1566 auf dem Reichstage zu Augsburg, 8 Reichsthaler auf die rauhe, und 9 auf die feine Mark;

b) der Leipziger oder 18 Guldenfuß, 1690 zu Leipzig, die feine Mark Silber zu 12 Reichsthaler oder 18 Fl. Dieser Fuß wurde 1738 zum allgemeinen Reichsfuße angenommen, ist aber dermal nur von Hannover noch beibehalten,

c) der Graumannische, oder 21 Guldenfuß, 1750 von Preußen angenommen, und 1764 erneuert. Die feine Mark Silber auf 14 Reichsthaler oder 21 Fl.

d) der Conventions- oder 20 Guldenfuß, die feine Mark zu $13\frac{1}{3}$ Thaler, oder 20 Gulden. Nach diesem Fuße werden dermal in den österreichischen, bayer., würtembergischen, sächsischen Staaten ꝛc. die Silbermünzen geprägt, aber nur in österreichischen und sächsischen Landen cursiren sie nach eben diesem Fuße; in den übrigen genannten Ländern cursiren solche nach

e) dem 24 Guldenfuß, nämlich die feine Mark Silber zu 16 Reichsthalern, 24 Gulden, oder 10 Conventionsthalern.

B.

Bayerische Geldrechnung.

Gulden	Batzen.	Groschen	Kreuzer	Pfenning	Heller.
1 Guld.	15	20	60	240	480
	1 Batzen	$1\frac{1}{3}$	4	16	32
		1 Gr.	3	12	24
			1 Kreuzer	4	8
				1 Pfenning	2
					Heller.

C.

Werth verschiedener Münzen.

Namen der Münzen.	Werth im 24 Guldenfuße.			
	fl.	kr.	pf	hl.
Bayern nach dem 24 Guldenfuß. Gulden	1	—	—	—
Reichsthaler	1	30	—	—
Kronenthaler	2	42	—	—
Conventionsthaler	2	24	—	—
halbe Conventionsthaler	1	12	—	—
20 Kr. Stücke		24	—	—
10 Kr. Stücke		12	—	—
Oesterreich nach dem Conventionsfuß.				
Kaisergulden	1	12	—	—
Ganze und halbe Convthlr. 20 kr. und 10 kr. Stücke wie in Bayern.				
Kronenthaler	2	42	—	—
halbe Kronenthlr.	1	21	—	—
Viertl Krthlr.		40	2	—
Sachsen Reichsthlr. nach d. Convent. Fuß zu 24 Gr.	1	48	—	—
Preußen Thaler nach 21 fl. Fuß	1	42	3	1
$\frac{1}{3}$ Thaler	—	34	1	$\frac{1}{3}$
England Pf. Sterl. Schilling oder 240 Pences	11	17	—	—
Frankreich Franc	—	27	3	—
Portugal Millerèes — 1000 Rées	2	46	3	$\frac{1}{2}$
Rußland Rubel zu 100 Kopeken	1	50	3	—
Spanien Real oder Réal de Vellon = 34 Maravedis	—	7	1	$1\frac{16}{70}$

Namen der Münzen.	Werth in 24 Gulden Fuß.			
	fl.	kr.	pf	hl.
Piastre (peso duro), = 20 Réal	2	28	—	—
Pistole (Doublon), = 8 Réal	9	52	—	—
Rèal, Piastre und Pistole sind zugleich reelle Münzen				
Türkei Piastre = 40 Paras = 100 gute Asper = 120 Curant Asper	—	54	3	1
Beutel (Keser), 500 Piastr.				
Beutel Gold (Kitze) = 30000 Piastr.				

D.

Verwandlung der sächsischen Geldrechnung in die bayerische, und umgekehrt.

Sächsisch Geld.	beträgt nach bayer. Gelde.				Bayerisches Geld.	beträgt nach sächs. Gelde.		
	fl.	kr.	pf	hl.		Thl.	Gr.	pf
1 Pfenning	—	—	1	1	1 kr.	—	—	$2\frac{2}{3}$
2 Pfenning	—	—	3	—	2 kr.	—	—	$5\frac{1}{3}$
3 Pfenning	—	1	—	1	3 kr.	—	—	8
4 Pfenning	—	1	2	—	12 kr.	—	2	8
1 Groschen	—	4	2	—	24 kr.	—	5	4
2 Groschen	—	9	—	—	30 kr. = $\frac{1}{2}$ fl.	—	6	8
12 Gr. = $\frac{1}{2}$ Th.	—	54	—	—	60 kr. = 1 fl.	—	13	4
24 Gr. = Thaler	1	48	—	—	90 kr. = Rthlr.	—	20	—
					1 Spec. Tl	1	8	—

E.

Verwandlung der preußischen Geldrechnung in die bayerische, und umgekehrt.

Preußisch Geld.	beträgt nach bayer. Gelde. fl.	kr.	pf	hl.
1 Pfenning	—	—	1	1
2 Pfenning	—	—	3	—
12 Pfen. = 1 Gr.	—	4	1	$\frac{1}{4}$
12 Gr. = $\frac{1}{2}$ Thlr.	—	51	1	$\frac{1}{2}$
24 Gr. = 1 Thlr.	1	42	3	1

Bayerisch Geld.	beträgt im preuß. Geld. Thl	Gr.	Pf.
1 Pfenning	—	—	$\frac{2}{3}$
1 Kr.	—	—	$2\frac{110}{137}$
12 Kr.	—	2	$10\frac{1}{2}$
14 Kr.	—	5	9
60 Kr. = 1 Fl.	—	13	1

Uebersicht und Eintheilung der neuen französischen Maße und Gewichte.

Vom Längenmaße ist der Mètre die Einheit, deren 100 = 342,630 bayer. Fuß. Der Mètre hat 10 Decimètres, 100 Centimètres, 1000 Millimètres. Dagegen machen 10 Mètres einen Décamètre, 100 Mètres einen Hectomètre, 1000 Mètres einen Kilomètre, 10000 Mètres einen Myriamètre, 100000 Mètres einen Degré.

*Der Myriamètre (10000 Mètres) ist die neue französische Lieue oder Meile; 2 Mètres = 1 Toise; 2000 Toises = 1 Lieue de post; 2 lieues de post = einer französischen Post. Eine französische Post soll nach neuer Rechnung 8000 Mètres oder 4000 Toises = 2124 Rheinländische Ruthen enthalten; man rechnet hier indessen nach

alter Rechnung die Toise zu 6 Pariser Fuß à 144 Linien, (also die Post zu 2070 Rh. Ruthen.)

Vom Flächenmaße ist der Are die Einheit, oder der Q. Décamètre (ein Quadrat, wovon jede Seite 10 Mètres beträgt, mithin eine Fläche von 100 Q. Mètres à 11,7395 bayer. Q. Fuß). Der Are hat 10 Déciares, 100 Centiares oder Q. Mètres, 1000 Milliares, 10000 Q. Decimètres, 1000000 Q. Centimètres, 100000000 Q. Millimètres. Dagegen machen 10 Ares einen Décare, 100 Ares einen Hectare oder einen Q. Hectomètre, 1000 Ares einen Kiliare, 10000 Ares einen Myriare oder Q. Kilomètre, 100000 Ares einen Q. Myriamètre, 1000000 Ares einen Q. Degré.

Vom Körpermaße: a) zu Holz, Kohlen rc. ist der Stère oder Kiliolitre von 40,2235 bayerischen Kubikfuß oder der Kubik Mètre die Einheit. Der Stère hat 10 Décistères, 100 Centistères, 1000 Millistères, 10 Stères geben einen Décastère;

b) zu trockenen und flüssigen Waaren ist der Litre oder Kubik Décimètre die Einheit, deren 100 = 93,453 bayer. Maß. Ein Litre hat 10 Décilitre, 100 Centilitres, 1000 Millilitres. Dagegen sind 10 Litres = 1 Décalitre, 100 Litres = 1 Hectolitre, 1000 Litres = 1 Kilolitre, 10000 Litres = 1 Myrialitre.

Vom Gewichte ist der Gramme die Einheit, deren 560 ein bayer. Pfund machen. Ein Gramme hat 10 Décigrammes, 100 Centigrammes, 1000 Milligrammes. Dagegen sind 10 Grammes = 1 Décagramme, 100 Grammes = 1 Hectogramme, 1000 Grammes = 1 Kilogramme, 10000 Grammes = 1 Myriagramme.

*Zu bemerken ist, daß in Frankreich Alles (Gold, Silber, Juwelen, Arzneimittel nicht ausgenommen) mit Einem und demselben Gewichte gewogen wird.

Maße und Gewichte für's gemeine Leben, oder im Detail Handel.

So sinnreich das Dezimalsystem ist, so konnte es doch nicht fehlen, daß nach dessen Einführung in Frankreich viele Unordnungen in dem täglichen Geschäftsverkehr entstanden, weil es besonders dem gemeinen Manne schwer wurde, sich darein zu versetzen. Dieß veranlaßte 1816 eine königl. Verfügung, nach welcher im Detail Handel das Decimalsystem folgende Abänderungen erleiden sollte.

Beim Längenmaße sollen für zu messende Gegenstände 2 Mètres Länge, in 6 Fuß abgetheilt, gleich einer Toise oder Klafter seyn. Demnach enthält 1 Toise 6,85262 bayer. Fuß.

$\frac{1}{3}$ Mètre oder $\frac{1}{6}$ Toise soll Fuß genannt, und in 12 Abtheilungen oder Zolle à 12 Linien zerlegt werden.

Stoffe, Leinwand u. dgl. können mit einem Maße gemessen werden, welches 12 Décimètres gleich ist und Aune heißt. Auf der einen Seite soll die Vertheilung $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, auf der andern Seite aber die Abtheilung des Mètre von 10 zu 10 Theilen stehen. Demnach enthält die französische Aune (Stab) 2,44054 bayer. Ellen.

Für Getreidemaß soll ein Maß bestehen, welches den achten Theil eines Hectolitre hält, und

Boisseau genannt wird. 1000 Boisseaux oder Schäffel geben 56,222 bayer. Schäffel.

Das Maß für Flüssigkeiten, die Pinte oder Litre, soll in $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ Litre zertheilt seyn.

Beim Handelsgewicht soll das Pfundgewicht einen halben Kilogramme oder 500 Grammes gleich kommen und in 16 Unzen à 8 Gros à 72 Gråns, aussermem aber in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{128}$ Grammes zertheilt werden.

Geometrie.

Vierzehntes Hauptstück.

§. 240.

Messen heißt einen Gegenstand von unbekannter Größe mit einem gleichartigen Gegenstande von bekannter Größe, den man ein Maß nennt, so vergleichen, daß man mit Bestimmtheit angeben kann, wie oft der letztere im ersteren enthalten sey. (Ueber die verschiedenen Längen-, Flächen- und Körpermaße sieh den Anhang zur Arithmetik.)

§. 241.

Unter einem Körper versteht man eine Größe, welche eine Länge, Breite und Dicke hat. Jeder Gegenstand, den wir vor uns sehen, ist also ein Körper. Der Mathematiker sondert aber den Raum, den ein Körper einnimmt, in Gedanken vom Körper selbst ab, d. i. er nimmt keine Rücksicht auf die Materie des Körpers, oder auf den physischen Körper, sondern betrachtet blos den mathematischen Körper oder den Raum, den der physische Körper einnimmt.

§. 242.

Unter einer Fläche versteht man die in Gedanken abgesonderte Gränze eines Körpers, welche man blos nach ihrer Ausdehnung in die Länge und Breite betrachtet.

§. 243.

Eine Linie ist die Gränze oder das Aeußerste einer Fläche; man muß daher dieselbe blos in die Länge ausgedehnt denken, ohne Rücksicht auf Breite und Dicke zu nehmen.

*Obgleich es in der Wirklichkeit Nichts gibt, was blos eine Länge und gar keine Breite und Dicke hätte, so gibt es doch viele Dinge, z. B. den Weg von einem Orte zum andern, u. dgl. bei denen blos die Länge, nicht aber auch die Breite und Dicke berücksichtigt wird.

§. 244.

Ein Punkt ist blos die Gränze einer Linie; der Punkt hat folglich gar keine Ausdehnung, weder eine Länge, noch Breite, noch Dicke. Man denke sich eine zur Hälfte schwarz, und zur Hälfte roth gezeichnete Linie, worin zwischen dem rothen und schwarzen Theile derselben gar kein Zwischenraum ist. Der Zwischenraum müßte nämlich eine andere als die rothe oder schwarze Farbe haben; denn was roth ist, gehört zur rothen Linie, so wie das, was schwarz ist, einen Theil der schwarzen Linie bildet. Man bemerkt indessen doch eine Stelle, wo die schwarze Farbe aufhört, und die rothe anfängt, die aber, wie schon gesagt, keinen Raum einnimmt, keinen Theil der ganzen Linie ausmacht, sondern nur eine Stelle darin bezeichnet, und folglich keine Länge hat. Da die ganze Linie keine Dicke und Breite hat, so wird auch diese einzelne Stelle der Linie ohne Dicke und Breite seyn. Diese Stelle nun, welche keine Länge, keine Dicke und Breite hat, wird Punkt genannt.

*Da die auf Papier gezeichneten Punkte Bilder der mathematischen, gar keinen Raum einnehmenden Punkte, die auf Papier gezeichneten Linien Bilder der mathematischen Linien, welche keine Dicke und Breite haben, seyn sollen, so versteht sich von selbst, daß wir unsere Punkte und Linien so fein als nur möglich ist, zeichnen müssen, und daß man auch aus demselben Grunde bei Vermessungen im Freien keine allzu große Gegenstände als Punkte betrachten dürfe, sondern die Spitze eines Stabes, eines Wetterableiters oder Wetterhahns u. dgl.

**Ein Punkt auf dem Papiere wird nach einem dabeistehenden Buchstaben des lateinischen Alphabets benannt, eine Linie nach zwei solchen Buchstaben, die man an ihre Endpunkte setzt.

§. 245.

Unter **Geometrie**, (Erdmeßkunst) verstehen wir die Wissenschaft, welche uns Linien, Flächen und Körper messen lehrt.

Man theilt sie in Rücksicht auf ihren Gegenstand ein:

a) in die **Longimetrie**, welche von den Linien und Winkeln handelt;

b) in die **Planimetrie**, welche von den Flächen und

c) in die **Stereometrie**, welche von den Körpern handelt.

*Den Namen Erdmeßkunst hat sie darum erhalten, weil sie von ihren Erfindern, den Aegyptiern, anfänglich vorzugsweise zum Ausmessen der Erdoberfläche (ihrer den Nilüberschwemmungen ausgesetzten Ländereien) benutzt wurde.

Longimetrie.

§. 246.

Die Linien werden eingetheilt:

a) in gerade, wie Figur 1, welche dadurch entstehen, daß sich ein Punkt in stäts unveränderter Richtung fortbewegt, und überall Spuren von sich zurückläßt.

b) in krumme, wie Fig. 2, welche dadurch entstehen, daß sich ein Punkt in stäts veränderter Richtung fortbewegt, und überall Spuren von sich zurückläßt;

c) in gemischte, wie Fig. 3, welche durch Zusammensetzung gerader und krummer Linien entstehen;

d) in gebrochene, wie Fig. 4, die durch Zusammensetzung gerader Linien entstehen, welche nicht alle einerlei Richtung haben.

*Gerade Linien zieht man auf dem Papiere mit Hilfe des Lineals. Größere gerade Linien werden auch durch eine stark gespannte Schnur dargestellt. Dergleichen Schnüre kann man auch zuerst in irgend eine Farbe tauchen, und, wenn sie festgespannt sind, an einem ungefähr in der Mitte liegenden Punkte aufziehen, und wieder auf ein unten liegendes Brett oder einen Balken zurückprallen lassen, um dadurch eine Zeichnung der geraden Linie hervorzubringen, wie dieß die Zimmerleute thun. Gerade Linien von bedeutender Größe werden mit Hilfe der sogenannten Absteckstäbe (gerader ungefähr 6 Schuh langer und 1 ¼ Zoll dicker, unten zugespitzter und mit Eisen beschlagener Stäbe) abgesteckt. Wenn nämlich 2 Punkte der Linie gegeben sind, so steckt man an diesen dergleichen Stäbe fest in den Boden. Nun stellt sich der Geometer hinter einen dieser Stäbe und sieht mit Einem Auge von diesem Stabe nach dem andern. Während dessen sucht sein Gehilfe, dem er durch Zuwinken die Stelle bezeichnet, einen dritten, vierten, fünften Stab zwischen den zwei bemerkten so zu setzen, daß sich alle Stäbe einander decken,

wenn man nach obiger Angabe von einem der äußersten nach den andern sieht (visirt.) Die Stäbe selbst müssen während des Visirens ganz oben und sehr leicht gefaßt werden, so daß sie zugleich den Boden nicht berühren, und, einem Senkblei gleich, sich frei bewegen können, damit sie senkrecht zu stehen kommen. Sobald sie aber an der rechten Stelle stehen, werden sie der Erde gen. hert, und unverzüglich in dieselbe gesteckt, später aber etwa durch Pfäle ersetzt.

**Um gerade Linien zu messen bedient sich der Geometer gewöhnlich der sogenannten geometrischen Ruthe á 10′ á 10″ á 10‴ (Sieh Seite 164 und 165.) Die Ruthe bezeichnet man durch (0), den Schuh durch (′), den Zoll durch (″), die Linie durch (‴), welche Zeichen alle hinter die Zahlen oder die Linie gesetzt werden. Man könnte also 7 Ruthen, 8 Schuh, 5 Zoll, 6 Linien auch so bezeichnen: 7°, 8′, 5″, 6‴.

§. 247.

Eine Kreislinie Fig. 5 ist eine krumme Linie, welche von einem Punkte u durch mehrere Punkte m, h, s, d, r gezogen ist, und von der entgegengesetzten Seite wieder in den Punkt u zurückkehrt, dabei aber in allen ihren Theilen von einem in der Mitte gelegenen Punkte c, den man Centrum, Mittelpunkt, auch schlechtweg Punkt heißt, gleich weit entfernt ist.

Die Kreislinie wird auch Zirkellinie, Peripherie genannt. Jedes Stück der Kreislinie nennt man einen Bogen. Theilt man die ganze Kreislinie in 360 gleiche Theile, so nennt man jeden dieser Theile einen Grad. Ein Grad ist also der drei hundert sechszigste Theil einer Kreislinie, und wird folglich bald größer, bald kleiner seyn, je nachdem die ganze Kreislinie kleiner oder größer ist. Der 60te Theil eines Grades heißt Minute, der 60te Theil einer Minute wird Sekunde genannt. 15°, 6′, 13″ wird gelesen 15 Grade, 6 Minuten, 13 Sekunden.

Eine gerade Linie c r, welche von dem Mittelpunkte c nach irgend einem Punkte r der Peripherie ge-

zogen ist, wir Radius oder Strahl, auch Halbmesser genannt.

Eine gerade Linie d m, welche von einem Punkte d der Peripherie nach einem andern Punkte m der Peripherie gezogen ist, und durch den Mittelpunkt geht, wird Durchmesser oder Diameter genannt.

Eine gerade Linie s h, welche von einem Punkte s der Peripherie nach einem andern Punkte h der Peripherie gezogen ist, und nicht durch den Mittelpunkt geht, nennt man Sehne oder Chorda.

Eine gerade Linie u t, welche die Peripherie nur in Einem Punkte berührt, und niemals schneidet, man mag sie nach dieser oder jener Richtung noch so sehr verlängern, heißt Tangente oder Berührungslinie.

Secante oder Schneidelinie ist eine gerade Linie c t, welche von einem ausserhalb der Peripherie liegenden Punkte nach einem innerhalb derselben liegenden Punkte gezogen ist, und so die Peripherie in einem Punkte schneidet.

*Eine Kreislinie entsteht, wenn sich eine gerade Linie c m so um den Punkt c bewegt, daß der Punkt m überall Spuren von sich zurückläßt. So schlägt man z. B. an einem Punkte c, welcher der Mittelpunkt eines Kreises werden soll, einen Nagel, Pfahl u. d. gl. ein, und befestigt an diesem eine Schnur, so, daß sich letztere ganz leicht um ihn herumdrehen kann, ohne sich aufzuwinden, An dem andern Ende dieser Schnur befestigt man ebenfalls ein Stückchen Kreide, Bleistift, oder wenn die Kreislinie auf Rasen oder Ackerland gezogen werden soll, auch ein spitziges Eisen u. d. gl. Nun fährt man mit der Kreide, dem Bleistifte oder auch Eisen bei möglichst gleicher Spannung der Schnur um den Punkt c herum, bis eine völlig vollendete Kreislinie entstanden ist. Statt der angespannten Schnur kann auch eine Latte dienen, welche sogar noch vorzuziehen ist, weil sie nicht, wie die Schnur, durch stärkeres und minderes Anspannen, durch Aufwickeln u. dgl. bald länger bald kürzer wird. Auf dem Papiere werden die Kreislinien mit Hilfe eines eigenen Instrumentes, des sogenannten Zirkels gezeichnet.

**Da alle Radien c m, c r, c d (Fig. 5.) gerade Linien sind, welche vom Mittelpunkte nach beliebigen Punkten m, r, d der Peripherie gezogen sind, so versteht es sich von selbst, daß alle diese Radien, und überhaupt alle Radien eines und desselben Kreises, einander gleich seyn müssen, weil ja alle Punkte der Peripherie vom Mittelpunkte gleich weit entfernt sind. — Aus demselben Grunde müssen auch alle Diameter eines und desselben Kreises einander gleich seyn, weil ja jeder Diameter aus zwei Radien besteht, und ein Paar solcher Radien offenbar dem andern Paare gleich seyn muß.

§. 248.

Einen auf Messing oder irgend einen andern Stoff gezeichneten Halbkreis (Fig. 6.) der genau in seine 180 Grade eingetheilt, und dessen Durchmesser und Mittelpunkt genau bezeichnet ist, nennt man einen Gradbogen oder Transporteur. Er dient zum Messen der Winkel.

§. 249.

Unter einem Winkel versteht man die Neigung zweier Linien, welche in einem Punkte zusammen stossen. Es kommt also hierbei auf die Länge der benannten Linien gar nicht an. Die Linien, welche den Winkel bilden, werden die Schenkel, der Punkt, in welchem sie zusammenstossen, wird der Scheitel des Winkels genannt. Man kann einen Winkel entweder durch Einen Buchstaben des lateinischen Alphabets bezeichnen, den man an den Scheitel zwischen die beiden Schenkel setzt; oder durch drei beliebige Buchstaben, wovon man zwei an die Endepunkte der Schenkel, und den dritten, welcher immer in der Mitte zwischen den beiden andern zu lesen ist, an den Scheitel des Winkels setzt.

§. 250.

Um einen Winkel auf dem Papiere zu messen, bringt man den Mittelpunkt des Transporteurs genau an den Scheitel des Winkels, und den einen Radius des ersteren genau an den einen Schenkel des letzteren, worauf man nun sieht, wie viele Grade des Transporteurs durch die beiden Schenkel des Winkels eingeschlossen werden.

§. 251.

Hat man einen Winkel von einer bestimmten Größe auf Papier zu zeichnen, so ziehe man einen der Schenkel auf der gehörigen Stelle, wodurch zugleich der Scheitel des Winkels bestimmt wird. Nun setze man den Mittelpunkt des Transporteurs genau auf den Scheitel des Winkels, den einen Radius des ersteren aber genau auf den bereits gezeichneten Schenkel des letzteren. Hierauf bezeichne man zunächst am Transporteur mit dem Bleistifte den Punkt, durch welchen der andere Schenkel gezogen seyn muß.

§. 252.

Hat man zu einem gegebenen Winkel a (Fig. 7. und 8.) einen gleich großen x zu zeichnen, so ziehe man vor allem eine gerade Linie, wodurch der Scheitel des Winkels x bestimmt wird. Nun reisse man mit beliebiger Zirkelöffnung aus a und mit eben derselben auch aus x zwei Bögen, mache den Bogen rz = mq, so ist der Punkt r bestimmt, durch welchen der zweite Schenkel des Winkels x gezogen werden muß.

§. 253.

Hat man einen gegebenen Winkel m (Fig. 9.) in zwei gleiche Theile zu zertheilen, so reisse man mit beliebiger Zirkelöffnung aus seinem Scheitel einen Bogen a b, durch welchen an den beiden

Schenkeln des Winkels die Punkte a und b bestimmt werden. Nun reisse man mit beliebiger doch ein und derselben Zirkelöffnung aus a und b zwei Kreuzbögen, welche sich in z schneiden, und ziehe die gerade Linie mz, welche den Winkel m in zwei gleiche Winkel zertheilt.

§. 254.

Die Winkel werden eingetheilt:

a) Nach ihrer Lage:

in nebeneinander liegende, wie a, b, c, d, e, f (Fig. 10.) welche einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, und von denen immer zwei auch einen gemeinschaftlichen Schenkel haben;

in Nebenwinkel, wie a und b (Fig. 11.), welche einen gemeinschaftlichen Schenkel und Scheitel haben, und deren beide andere Schenkel eine gerade Linie bilden;

in Scheitelwinkel, wie a und b, c und d (Fig. 12.), welche einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, und von denen der eine durch Fortsetzung der beiden Schenkel des andern entstanden ist;

in Wechselwinkel, wie a und b (Fig. 13.), welche einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und sich nach entgegengesetzten Richtungen öffnen.

b) Nach ihrer Größe werden die Winkel eingetheilt:

in hohle, welche weniger als 180° halten. Diese sind entweder rechte, wenn sie genau 90° halten, wie m c q (Fig. 6.), oder spitzige, wenn sie weniger als 90° halten, wie u c q (Fig. 6.), oder stumpfe, wenn sie mehr als 90° halten, wie g c q (Fig. 6.);

in gerade, welche genau 180° halten, wie f c q (Fig. 6.), und strenge genommen gar keine Winkel zu nennen sind, weil ihre beiden Schenkel eine gerade Linie bilden, und folglich keine Neigung zu einander haben;

in erhabene, wie x c q (Fig. 6.), welche mehr als 180° halten, und daran kennbar sind, daß sie ihre Ecken immer in die Figur hinein kehren.

*In Fig. 14. ist a ein rechter, b und d sind spitzige, c ist ein erhabener, e ein stumpfer Winkel.

Von den beiden Schenkeln eines rechten Winkels nennt man einen, gleichviel welchen, einen Perpendikel, Senkel, ein Loth, eine senkrechte, bleirechte, perpendikuläre, vertikale Linie; den andern Schenkel nennt man eine wasserrechte, wagerechte, horizontale Linie. Diese senkrechten und wasserrechten Linien entsprechen den physisch-senkrechten und physisch-wasserrechten. Eine Linie ist physisch senkrecht, wenn sie, nach unten verlängert, den Mittelpunkt der Erde treffen würde. Man erhält sie mit Hilfe des sogenannten Senkbleies, eines (meistentheils bleiernen) Gewichtes, welches an eine gewöhnliche Schnur gebunden ist. Wenn man nämlich die Schnur an irgend einem Punkte festbindet oder festhält, und das bleierne Gewicht sich frei und ungehindert hin und her bewegen läßt, so wird letzteres vermöge seiner Schwere (der Eigenschaft, nach dem Mittelpunkte der Erde hinzustreben) sich dem Mittelpunkte der Erde so sehr nähern als möglich, und wird zugleich die Schnur so spannen, daß diese eine gerade Linie bildet. Dieß wird zugleich jene gerade Linie seyn, welche nach unten verlängert den Mittelpunkt der Erde treffen würde, weil das Gewicht in jedem andern Falle weiter vom Mittelpunkte der Erde entfernt seyn würde, als in diesem. Eine Linie ist physisch wasserrecht, wenn sie mit der physisch senkrechten einen rechten Winkel bildet, oder wenn sie mit der Oberfläche des stillstehenden Wassers gleichlaufend ist. Auf ersteres gründet sich die Einrichtung der sogenannten Setzwage, auf letzteres die Einrichtung der sogenannten Wasserwage.

§. 255.

Um einen Winkel auf dem Felde zu messen, bedient man sich verschiedener Werkzeuge:

a) Des Meßtisches, eines Reißbretes, welches horizontal auf einem Gestelle (Stativ) ruht. Zu diesem gehört ein Diopterlineal, ein messingenes Lineal, an dessen Enden zwei Dioptern oder Absehen perpendikulär befestiget sind. In dem einen dieser Dioptern ist eine feine senkrechte Ritze, die an's Auge kommt, in dem andern ein feiner Faden in einer viereckigen Oeffnung, wodurch man den Gegenstand sehen kann. Man legt dieses Diopterlineal so auf den Meßtisch, daß der Faden beim Durchsehen den Gegenstand bedeckt, und zieht auf dem darunter aufgespannten Papiere eine Linie, welche die gerade Linie nach dem Gegenstande anzeigt. Dreht man nun das in der Mitte durch eine Stecknadel befestigte Lineal, und visirt nach einem zweiten Orte hin, so hat man den Winkel von den Objekten sogleich auf dem Papiere, woraus der Vorzug des Meßtisches erhellet;

b) des Astrolabiums, eines Halbkreises, auf dessen Rande die Grade angegeben sind, mit einem um den Mittelpunkt beweglichen Diopter-Lineal, und zwei Dioptern an den Enden des Halbkreises. Die unbeweglichen Dioptern richtet man nach dem einen Gegenstande, und läßt das Astrolabium auf seinem Stativ fest und horizontal stehen, richtet die beweglichen Dioptern nach dem andern Gegenstande, und erhält so den Winkel der beiden Objekte in Graden. Diesen Winkel muß man nun mittelst des Transporteurs auf das Papier übertragen.

c) Der Boussole, eines Diopterlineals, welches sich auf einem Stativ bewegen läßt, und in der Mitte einen Absatz hat, worauf ein rundes Gehäuse mit einer Magnetnadel befestiget ist. Inwendig ist ein in Grade abgetheilter Ring, auf

welchem die Magnetnadel den Winkel angibt, welchen die Mittellinie des Diopterlineals mit der Richtung der Magnetnadel macht. Mit diesem Instrumente kann man zwar sehr schnell messen, und kann sich auch vorzüglich in waldigen Gegenden, wo man nicht visiren kann, mit großem Vortheile desselben bedienen, indessen sind die damit gemachten Messungen nicht immer sehr genau.

*Die Kenntniß dieser Instrumente dürfte für Anfänger hinreichend seyn.

Man kann übrigens auch ohne alle Instrumente Winkel auf dem Felde messen, und sie dann zu Papier bringen. Gesetzt man habe (Fig. 7.) den Winkel a zu messen, so darf man nur auf den beiden Schenkeln desselben gleiche Längen, etwa 20 Schuh, nach m und q auftragen, und dann die Linie m q messen. Zieht man nun auf dem Papiere auch eine Linie a q und macht diese auf dem Papiere etwa 20 Linien groß, beschreibt dann mit der Zirkelöffnung a q aus a einen Bogen, und macht den Bogen q m auf dem Papiere so viele Linien groß, als m q im Freien Schuhe hält, so darf man nur die Linie a m ziehen, und der Winkel a auf dem Papiere ist genau so groß als der Winkel a auf dem Felde.

Können die beiden Schenkel nicht gleich lang gemessen werden, und ist z. B. (Fig. 29.) der Schenkel a c kürzer als der Schenkel a b, so trage man anfangs a b auf das Papier, (so viele Zolle oder Linien groß, als es im Freien Schuhe hält), beschreibe aus a mit einer Zirkelöffnung, die so viele Zolle oder Linien hält, als a c im Freien Schuhe hält, einen Bogen, und aus b ebenfalls mit einer Zirkelöffnung, die so viele Zolle oder Linien hält, als b c im Freien Schuhe mißt, einen zweiten Bogen, welcher den ersteren in dem Punkte c schneidet. Zieht man nun die gerade Linie a c, so ist der Winkel a auf dem Papiere eben so groß, als der Winkel a im Freien.

Hat man einen stumpfen Winkel b (Fig. 11.), so verlängere man blos den einen Schenkel dieses Winkels, trage den dadurch entstandenen Nebenwinkel a nach der eben beschriebenen Weise auf das Papier, und der Winkel b ist dadurch von selbst gezeichnet.

Soll ein spitziger Winkel d (Fig. 12.), zu dessen Schenkeln man nicht kommen kann, auf Papier gezeichnet werden, so verlängere man seine Schenkel, trage den dadurch entstandenen Scheitelwinkel c nach der oben bezeichneten Art auf das Papier, und man hat dann auch durch Verlängerung der Schenkel den Winkel d.

§. 256.

Einen rechten Winkel kann man auf verschiedene Weise erhalten:

A.) Auf dem Papiere.

1.) Mit Hilfe des Transporteurs, indem man nach §. 251. einen Winkel von 90° zeichnet.

2.) Mit Hilfe des Winkelhackens oder hölzernen Dreieckes (Fig. 15. und 16.)

3.) Auf dem Reißbrete auch mit Hilfe des Kopf-Lineals (Fig. 17.)

Mit Hilfe des Zirkels auf verschiedene Art.

4.) Wenn nämlich auf den noch nicht bekannten Mittelpunkt c einer geraden Linie a b (Fig. 18.) eine senkrechte Linie d e errichtet werden soll, so öffne man den Zirkel beliebig doch bis über die Hälfte von a b, und reisse man aus a und b unter- und oberhalb a b zwei Bögen, welche sich in d und e schneiden; nun ziehe man diese beiden Kreuzbögen durch eine gerade Linie zusammen.

5.) Soll auf einen gegebenen nicht in der Mitte von a b gelegenen Punkt d (Fig. 19.) ein Perpendikel errichtet werden, so öffne man den Zirkel beliebig, und stecke aus d auf a b zwei gleiche Weiten d m und d o ab, wodurch die Punkte m und o bestimmt werden. Nun öffne man den Zirkel

etwas mehr, und reisse mit ein und derselben Zirkelöffnung aus m und o unter- und oberhalb ab zwei Bögen, welche sich in g und x kreuzen. Hierauf ziehe man die Punkte g und x durch eine gerade Linie zusammen.

6.) Soll auf eine gerade Linie a b von einem darüber liegenden Punkte c (Fig. 20.) ein Perpendikel gefällt werden, so reisse man aus c mit beliebiger Zirkelöffnung einen Bogen, welcher ab in g und q schneidet. Nun reisse man etwa mit derselben Zirkelöffnung aus g und q unterhalb ab zwei Bögen, welche sich in m schneiden, und ziehe dann die Punkte c und m durch eine gerade Linie zusammen.

7.) Soll auf einen gegebenen Punkt q einer geraden Linie q z (Fig. 21.) ein Perpendikel errichtet werden, so reisse man aus q mit beliebiger Zirkelöffnung einen Bogen d x, und trage auf diesen dieselbe Weite (den Radius des Bogens) aus x nach m und aus m nach d. Aus den Punkten m und d reisse man etwa mit derselben Weite zwei Kreuzbögen, welch sich in g schneiden. Nun ziehe man die Punkte g und q durch eine gerade Linie zusammen.

8.) Hat man auf einen gegebenen Punkt z einer geraden Linie m z (Fig. 22.) einen Perpendikel zu errichten, so setze man den Zirkel in einem beliebigen zwischen m und z oberhalb m z gelegenen Punkte c ein, öffne ihn bis z, und reisse nun einen Bogen, welcher m z in x, und die verlängerte gerade Linie x c in g schneidet. Nun ziehe man die Punkte g und z durch eine gerade Linie zusammen.

B. Im Freien.

9.) Wenn in Fig. 23. auf den Punkt c der geraden Linie a b ein Perpendikel errichtet werden soll, so trage man aus c gleiche Weiten c m und c q auf a b. Nun setze man in den Punkten m und q zwei vollkommen gleich lange Latten so auf, daß sie in einem

Punkte x zusammenstossen. Zieht man nun die Schnur durch die Punkte c und x, so stellt sie eine gerade Linie dar, welche ein Perpendikel auf den Punkt c der geraden Linie ab ist. Bei Gebäuden bedient man sich auch eines großen hölzernen Winkelmaßes (Fig. 15) an welches die Schnüre angezogen werden.

10.) Wenn in Fig. 24. auf den Punkt m der geraden Linie ab ein Perpendikel errichtet werden soll, so trage man eine Weite (etwa 3 Schuh) auf eine Latte qm 3mal, auf eine andere Latte qx 5mal, und wieder auf eine andere mx 4mal. Nun lege man eine der kürzeren Latten qm, so auf die gerade Linie ab, daß das eine Ende der Latte, m, genau auf den Punkt m der geraden Linie ab zu liegen kommt. Nun setze man die andere der kürzeren Latten so auf m, und die längste so anf q, daß sie sich beide in x berühren. Zieht man nun eine Schnur durch die Punkte m und x, so stellt sie den verlangten Perpendikel auf den Punkt m der geraden Linie ab dar. Bei Zusammensetzung großer Balken bedient man sich durchgehends dieses Verfahrens; indem man auf einen der Balken 12, auf den andern 16, und auf eine Latte 20 Schuh aufträgt, und dann die Balken so lange hin und her reibt, bis die Endepunkte der aufgetragenen Linien mit den Endepunkten der Latte genau zusammentreffen. Die Werkleute nennen daher dieses Maß das R i e b m a ß.

11.) Hat man (in einer Figur 25.) auf einer gegebenen Linie ab den Punkt zu suchen, auf welchen von einem gegebenen Punkte c eine gerade Linie so gezogen werden kann, daß sie ein Perpendikel auf ab ist, so gehe man mit der sogenannten Winkelscheibe (Fig. 26.) einem runden, oder viereckigen Stücke Holz, in das mit einer Säge ein Kreuz rechtwinkelig eingeschnitten ist, und welches auf einem mit einer Spitze versehenen Fuße steht, auf der Linie ab so lange auf und ab, bis man die Winkelscheibe auf ab senkrecht so einstecken kann, daß man durch einen Schnitt die Punkte a und b, und durch den andern den Punkt c sehen kann. Zieht man nun von dem Punkte, in

welchem die Winkelscheibe eingesteckt wurde eine gerade Linie nach c, so ist diese der verlangte Perpendikel von c auf ab. Statt der Winkelscheibe kann man sich eines Kreuzes (Fig. 27.) bedienen, auf welches unter einem rechten Winkel zwei feine Linien gezeichnet sind, an deren 4 Endepunkten 4 senkrechte Stifte eingesetzt sind.

*Wie man hier viel bequemer mit Hilfe des Winkelspiegels zurecht kommt, lernt man am besten durch Zusehen bey wirklicher Anwendung desselben.

§. 257.

Alle Winkel (Fig. 10.), welche rings um einen Punkt herumliegen, halten zusammengenommen 360 Grade.

Denn will man diese Winkel messen, so braucht man nur aus ihrem gemeinschaftlichen Scheitel eine Kreislinie zu ziehen, und man wird sehen, daß sie alle zusammengenommen, die ganze Kreislinie zu ihrem Maße haben — also 360 Grade halten.

Hat man daher einen erhabenen Winkel c (Fig. 14.) zu messen, so messe man den neben ihm liegenden hohlen x, und ziehe die Grade des letzteren von 360 ab, so bleiben die Grade des erhabenen Winkels.

§. 258.

Zwei Nebenwinkel (Fig. 11.) halten zusammengenommen 180 Grade.

Denn will man die beyden Winkel messen, so darf man nur aus ihrem gemeinschaftlichen Scheitel eine Kreislinie ziehen, und man wird sehen, daß sie beide zusammengenommen die halbe Kreislinie zu ihrem Maße haben — mithin 180 Grade halten.

Ist also von zwei Nebenwinkeln einer bekannt, so ist es auch der andere; man darf nur die Grade des einen von 180 subtrahiren.

§. 259.

Zwei Scheitelwinkel (Fig. 12) sind einander gleich;

$$\begin{array}{ll} & a = b \\ \text{Denn} & \left.\begin{array}{l} a + c = 180^\circ \\ b + c = 180^\circ \end{array}\right\} \text{§. 258.} \\ & a + c = b + c \quad \text{§. 6. 4,} \\ & -c = -c \quad \text{§. 6. 1.} \\ \hline & a = b \quad \text{§. 6. 9.} \end{array}$$

Ist also von den 4 Winkeln a, c, b, d einer bekannt, so sind es auch die 3 andern. Hält z. B. der Winkel a genau 100 Grade, so hält der Winkel b als sein Scheitelwinkel eben so viele, folglich beide zusammen 200 Grade. Da nun nach §. 257. die 4 Winkel zusammengenommen 360 Grade halten, so müssen die beiden Winkel c und d mit einander 160 Grade, folglich jeder 80 Grade halten, weil sie als Scheitelwinkel einander gleich sind.

§. 260.

Wenn zwei gerade Linien eine solche Lage gegen einander haben, daß sie sich, nach Einer Richtung a verlängert, endlich einander schneiden, nach der andern b verlängert, immer mehr von einander entfernen würden, so sagt man sie sind nach der ersteren Richtung a **convergirend**, und nach der Richtung b **divergirend**.

§. 261.

Linien, welche in allen ihren Punkten gleich weit von einander abstehen, nennt man **Parallel- oder gleichlaufende Linien**. So sind die Linien, welche von den beiden Rädern eines Wagens im Schnee zurückgelassen werden, Parallellinien. Die Kreislinie, welche die untere Gränzfläche eines Kronenthalers einschließt, und jene, welche die obere Gränzfläche desselben umgibt, nennt man **Parallel-Kreise**, und zum Unterschiede von solchen, nennt man die Kreislinien, welche aus einem gemeinschaft-

lichen Mittelpunkte mit verschiedenen Zirkelöffnungen auf ein und derselben Fläche (z. B. auf einer Scheibe) gezogen werden, **concentrische Kreise.**

*Parallellinien können sich niemals schneiden, man mag sie nach dieser oder jener Richtung noch so sehr verlängern.

§. 262.

Wenn zwei gerade Parallellinien yg und fp (Fig. 30.) von einer geraden Linie uh geschnitten werden, so sind a und e, b und m, c und q, d und z die äußeren und inneren Winkel auf Einer Seite der schneidenden Linie; c und m, d und e nennt man die inneren Wechselwinkel; a und z, b und q nennt man äußere correspondirende Winkel.

Da ist nun der Winkel a gleich dem Winkel e. Denn der Schenkel ay des Winkels a hat zur schneidenden Linie dieselbe Neigung, bildet folglich damit denselben Winkel wie der Schenkel ef des Winkels e. Neigte sich nämlich ay zur schneidenden Linie mehr aufwärts als ef, etwa wie as, so würden yg und fp, über g und p hinaus verlängert, sich einander schneiden und könnten nicht parallel seyn. Dasselbe wäre der Fall, wenn sich ay zur schneidenden Linie mehr abwärts neigte als ef, etwa wie ai; denn da würden yg und fp, über y und f hinaus verlängert, sich einander schneiden.

Da man dieses eben so auch von den Winkeln b und m, c und q, d und z hätte beweisen können, so stellt man überhaupt den Satz als erwiesen auf; **der innere und äußere Winkel auf Einer Seite der schneidenden Linie sind einander gleich.**

Ferner sind die inneren Wechselwinkel gleich:

$$c = m$$

Denn $c = q$

$$m = q$$

$$c = m$$

Endlich sind die äußeren correspondirenden Winkel einander gleich:

$$a = z$$

$$\text{Denn}\quad \begin{array}{l} a = e \\ z = e \end{array}$$

$$a = z$$

*Wenn von diesen acht Winkeln Einer bekannt ist, so sind es auch die sieben andern.

§. 263.

Parallel-Linien auf dem Papiere zu zeichnen.

Man hat dazu ein eigenes, das sogenannte Parallellineal. Soll nun (Fig. 31.) zu einer gegebenen Linie ab eine Parallele gezogen werden, welche durch einen Punkt c geht, so setze man eine Kante des Parallellineals genau auf ab und öffne das Lineal so weit, daß an der andern Kante desselben eine Linie gezogen werden kann, welche durch den Punkt c geht. Da übrigens dergleichen Lineale, wenn sie auch noch so sorgfältig gearbeitet sind, durch den Gebrauch leicht unregelmäßig werden, so sind sie nicht sehr zu empfehlen, abgesehen davon, daß sie an und für sich nicht in allen Fällen angewendet werden können.

Wenn man an einem Reißbrete oder einer im rechten Winkel gemachten Tafel das Kopflineal an die Kante des Bretes oder der Tafel fest anlegt, und dann an der Kante des so auf- und abschiebbaren Lineals Linien zieht, so sind diese parallel.

Soll zu einer gegebenen Linie ab (Fig. 32.) eine Parallellinie gezeichnet werden, welche durch einen gegebenen Punkt d geht, so lege man einen der kürzeren Schenkel eines rechtwinkeligen hölzernen Dreieckes genau an die Linie ab, und an den andern kürzern Schenkel desselben lege man ein gewöhnliches Lineal. Letzteres halte man nun so fest, daß das Dreieck daran auf- und abwärts geschoben werden kann. Nun schiebe man das Dreieck wirklich so weit abwärts, daß an dem einen kürzern Schenkel des-

selben eine gerade Linie gezogen werden kann, welche durch den Punkt d geht.

Hat man zu einer gegebenen geraden Linie ab (Fig. 33.) eine Parallele zu ziehen, welche durch einen Punkt c geht, so setze man in einem beliebigen Punkte m der geraden Linie ab ein, öffne den Zirkel bis c, und reisse nun den Bogen cy; mit derselben Zirkelweite setze man nun in einem andern beliebigen Punkte x der geraden Linie ab ein, und reisse den Bogen do; nun mache man do = cy, wodurch der Punkt d bestimmt wird. Zieht man nun durch c und d eine gerade Linie, so ist diese die verlangte Parallele zu ab. Fällt man von c (Fig. 34.) einen Perpendikel cq auf ab, und errichtet auf b einen gleich großen Perpendikel bm, so darf man nur durch c und m eine gerade Linie ziehen, und sie ist die verlangte Parallele zu ab.

Zieht man von c (Fig. 35.) nach einem beliebigen Punkte etwa b der geraden Linie ab eine gerade Linie, reißt dann aus b mit beliebiger Zirkelöffnung den Bogen qm, und mit derselben Zirkelöffnung aus c den Bogen xz, und macht letzteren so groß als qm, so ist dadurch der Punkt z bestimmt. Nun darf man nur durch die Punkte c und z eine gerade Linie ziehen, so ist diese die verlangte Parallele zu ab.

*Nach den beiden zuletzt angegebenen Arten werden die Parallellinien auch im Freien gewöhnlich ausgesteckt.

§. 264.

1.) Hat man eine gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen, so verfahre man nach der in §. 256. 4. angegebenen Weise.

2.) Soll eine gerade Linie ab (Fig. 36.) in drei gleiche Theile getheilt werden, so reisse man aus a und b mit der Zirkelöffnung ab unter- und oberhalb ab zwei Bögen, welche sich in c und d schneiden. Nun ziehe man die geraden Linien ac und bc, theile diese nach Nr. 1. in x und m in zwei gleiche Theile,

und ziehe endlich die geraden Linien xd und md, durch welche ab in drei gleiche Theile zertheilt wird.

3.) Hat man eine gegebene Linie ab (Fig. 37.) in eine bestimmte Anzahl z. B. in 6 gleiche Theile zu zertheilen, so reisse man aus a und b mit beliebiger Zirkelöffnung unter= und oberhalb ab zwei vollkommen gleiche Bögen, ziehe durch die Endepunkte x und d dieser Bögen aus a und b gerade Linien, und trage auf diese aus a und b 6 — 1 d. i. 5 beliebige doch vollkommen gleiche Zirkelweiten, und bezeichne die dadurch erhaltenen Punkte mit 1, 2, 3, 4, 5. Nun ziehe man die Punkte 1 und 5, 2 und 4, 3 und 3, 4 und 2, 5 und 1 durch gerade Linien zusammen, so wird durch letztere die gerade Linie ab in 6 gleiche Theile getheilt.

4.) Hat man (Fig. 38.) mehrere gerade Linien ab, cd, mh, ok in eine bestimmte Anzahl z. B. in 6 gleiche Theile zu zertheilen, so kann man sich auf folgende Art einen Linientheiler verfertigen. Man ziehe eine gerade Linie xy, und trage auf dieser von x nach y 6 beliebige doch vollkommen gleiche Zirkelweiten auf, so daß jedoch xy größer wird, als die größte der zu theilenden Linien. Nun reisse man aus x und y oberhalb xy mit der Zirkelöffnung xy zwei gleiche Bögen, welche sich in z schneiden, und ziehe von z nach den verschiedenen Theilungspunkten von xy gerade Linien. Soll nun auf diesem Linientheiler die gegebene Linie ab in 6 gleiche Theile getheilt werden, so trage man ab aus z auf die Linien zx und zy, wodurch auf diesen die Punkte a und b bestimmt werden. Zieht man nun letztere durch eine gerade Linie zusammen, so entsteht die in 6 gleiche Theile getheilte Linie ab. Eben so verfahre man mit den übrigen zu theilenden Linien.

5.) Hat man (Fig. 39) mehrere gerade Linien aq, an, ao, au die eine in 12, die andere in 10, die andere in 9, und die andere in 3 gleiche Theile u. s. w. zu zertheilen, so kann man sich auf folgende Weise einen Linientheiler verfertigen: Man ziehe eine gerade Linie cm, die so lange ist, als die längste der

zu theilenden Linien. Auf die Endepunkte dieser geraden Linie errichte man Perpendikel, trage auf diese von c und m eine beliebige, jedoch kleine und vollkommen gleiche Zirkelweite 13mal auf, uud ziehe die dadurch bezeichneten Punkte durch gerade Linien zusammen. Nun bezeichne man den obersten Punkt des auf den Punkt c errichteten Perpendikels durch a, und den des auf m errichteten durch b; ferner schreibe man zu m die Zahl 12, zu dem zunächst ober ihm liegenden Punkte die Zahl 11 u. s. w. Will man nun die Linie a n in 9 gleiche Theile zertheilen, so reisse man mit der Zirkelöffnung a n aus a auf der mit 9 bezeichneten Linie einen kleinen Bogen, wodurch auf letzterer der Punkt n bestimmt wird. Zieht man nun die gerade Linie a n, so ist diese in 9 gleiche Theile getheilt. Eben so mache man es auch mit allen andern Linien.

§. 265.

Da man eine Linie von etwa 7 Schuh nicht wohl in ihrer wirklichen Größe auf Papier zeichnen kann, so nimmt man beim Aufzeichnen einer solchen Linie eine kleinere Länge, etwa einen Zoll, als Schuh an, und zeichnet sie dann 7 Zoll groß auf das Papier. Man sagt nun: sie sey im verjüngten Maßstabe aufgezeichnet worden. Ein verjüngter Maßstab ist demnach nichts weiter als eine gerade Linie, welche dergestalt in mehrere gleiche Theile getheilt ist, daß ein solcher Theil als ein zwölfmal, hundertmal u. s. w. größeres Maß, (als ein Schuh, eine Ruthe, Meile u. s. w.) angesehen wird. Je mehr Schuh, Meilen u. s. w. also eine Linie im Freien hält, eine desto kleinere Linie muß beim Aufzeichnen derselben als Schuh oder Meile angenommen werden, weil sonst eine solche Linie nicht wohl zu Papier gebracht werden könnte. Man sieht hieraus, daß es unendlich viele verjüngte Maßstäbe geben könne — größere und kleinere.

1.) Trägt man (Fig. 40.) auf einer geraden Linie 12 gleiche Theile auf, wovon man jeden als Zoll

betrachtet, faßt diese 12 Zoll zusammen in den Zirkel, und trägt diese Weite noch einigemal auf die Linie, bezeichnet dann die dadurch bestimmten Punkte mit 1, 2, 3 u. s. w., so erhält man einen verjüngten Maßstab für das 12theilige oder Duodecimalmaß. Trägt man anfänglich statt 12 Theilen nur 10 Theile auf wie Fig. 41., so erhält man auf dieselbe Weise einen verjüngten Maßstab für das zehntheilige oder Decimalmaß.

2.) Um einen verjüngten Maßstab zu erhalten, von welchem kleinere Theile können herabgenommen werden, zieht man (Fig. 42.) eine gerade Linie b d, steckt auf dieser von b nach y für das Dezimalmaß 10, und für das Duodezimalmaß 12 gleiche Theile ab, und errichtet auf den Punkten b und y Perpendikel b a und y u von der Höhe eines solchen Theiles. Nun ziehe man die gerade Linie a y, und trage noch überdieß die Weite b y aller 10 oder 12 Theile zusammengenommen ein oder mehreremale von y nach d auf b d. Läßt man nun y d einen Schuh gelten, so ist ein Theil a k ein Zoll, und ein Theil k n eine Linie, e o zwei Linien u. s. f.

3.) Man theile (Fig. 43.) eine Linie a h von a bis c für das 10theilige Maß in 10, für das 12theilige Maß in 12 gleiche Theile, ziehe a b senkrecht auf a h, theile a b ebenfalls in 10 oder 12 gleiche Theile von beliebiger Größe, mache die Theile von b d gleich denen von a c, ziehe dann die Quer- oder Transversallinien c 1, 12, 23 u. s. f. Die Länge a c trage man abwärts ungefähr fünfmal, und setze die Zahlen, wie die Figur zeigt. Läßt man nun die Weite d 1 einen Schuh gelten, so gibt b d 10 Schuh, und m n einen Zoll. Läßt man d 1 zehn Schuh gelten, so gibt m n einen Schuh, o p zwei Schuh u. s. w. Gilt d 1 zehn Schuh, und man will z. B. 36 Schuh abnehmen, so suche man auf a c die Zahl 3, fahre auf der Querlinie aufwärts, bis man auf der Linie a b die Zahl 6 bemerkt; wo die geraden Linien von 6 und 3 sich begegnen ist der Punkt s, welcher bis

x 36 Schuh gibt. Die Linie ce hält 100 Schuh. Will man also 136 Schuh, so gibt dieß die Linie us.

*Fig. 44. und 45. stellen andere Arten von Maßstäben vor, deren Gebrauch und Construktion nun wohl einleuchten wird.

§. 266.

Hat man zwischen 2 Punkten a und b, zwischen welchen eine Anhöhe liegt, so daß man von a nach b wohl gehen, aber nicht sehen kann, eine gerade Linie abzustecken, so stecke man in die beiden Endepunkte der Linie a und b Stäbe senkrecht ein. Nun setze man auf der Anhöhe zwei Stäbe c und d, den einen c gegen a hin, und den andern d gegen b hin, ebenfalls senkrecht so ein, daß man von d über c nach a, und von c über d nach b visiren kann. Daß der richtige Standpunkt der Stäbe c und d durch öfteres Versetzen derselben gesucht werden muß, leuchtet von selbst ein.

§. 267.

Soll eine gerade Linie über einen Berg gemessen werden, so nehme man eine Meßlatte (Fig. 46.) von 10 Schuh Länge, befestige vorne ein gleichschenkeliges Dreieck daran, dessen Spitze senkrecht auf dem Punkte 10 steht. Von diesem Punkte lasse man durch eine kleine Oeffnung eine Schnur mit einem Senkblei herunter, welches man auf- und abziehen kann. Beim Messen (Fig. 47.) lege man die Latte so an, daß die Schnur, woran das Senkblei hängt, an der Spitze des gleichschenkeligen Dreieckes steht, wodurch die Latte immer wagerecht bleibt, und stecke dort wo das Senkblei den Boden berührt, einen kleinen Stab ein, an welchen man die Latte wieder anlegt, und so fortfährt, bis die Linie gemessen ist.

§. 268.

Soll eine gerade Linie ab (Fig. 48.) durch einen Wald gemessen werden, wo man von a den Punkt b nicht sehen kann, so messe man ungefähr nach der Richtung gegen b eine gerade Linie ac. Von c stecke man eine gerade Linie nach einem Punkte d ab, von welchem Punkte d natürlich nach dem Punkte c und nach dem Punkte b muß visirt werden können, messe die Linien cd und db, ferner die Winkel c und d, bringe die Figur nach einem möglichst großen verjüngten Maßstabe zu Papier, ziehe nun auf dem Papiere ab, und nehme vom verjüngten Maßstabe die Zahl der Ruthen, Schuhe u. s. w. der Linie ab herab.

Oder: Man stecke in den Anfangspunkt a einen Stab, ferner einen zweiten h beiläufig in der Richtung gegen den andern Punkt b, und einen dritten c dergestalt, daß man von ihm aus die zwei ersten Punkte a und h sehen kann, messe die drei möglichst horizontalen Seiten des abgesteckten Dreieckes ahc, bemerke die Punkte a, h, c mit Zeichenstäben, und diese mit Buchstaben oder Nummern; zeichne ihre Lage gegeneinander beiläufig auf ein Blatt Papier, und schreibe zu jedem Winkel den nämlichen Buchstaben oder dieselbe Nummer, und zu jeder Seite das gefundene Maß. Nun befestige man ungefähr gegen den Punkt b abermal einen Stab d, welcher von h und c gesehen werden kann, bilde ein neues Dreieck hcd, messe dessen 2 ebenfalls möglichst horizontale neue Seiten hd und cd, bemerke ihre Endepunkte, zeichne ihre Lage auf, und schreibe Buchstaben und Maße bei, wie oben. So fahre man fort, und bilde die Dreiecke cde, def, efg, fgb. Nun zeichne man nach einem möglichst großen verjüngten Maßstabe die Linie ac auf Papier, nehme die Linie ah vom verjüngten Maßstabe ab, und reisse mit dieser Zirkelweite aus a einen Bogen, nehme dann auch die Linie ch vom verjüngten Maßstabe ab, und reisse auch mit dieser Zirkelweite einen Bogen, welcher den

ersteren schneidet. Zieht man nun von diesem Durchschnittspunkte gerade Linien nach a und c, so ist das Dreieck a h c richtig zu Papier gebracht. So verfahre man auch mit allen übrigen Dreiecken, und es wird endlich die ganze Figur a c e g b f d h richtig im verjüngten Maßstabe zu Papier gebracht seyn. Zieht man nun in dieser Zeichnung die gerade Linie a b und faßt sie in den Zirkel, so kann vom verjüngten Maßstabe die Länge von a b herabgenommen werden. Man kann auch die Linien h u, d x, d m, f n, f z in der aufgezeichneten Figur nach dem verjüngten Maßstabe messen, und darnach die entsprechenden Punkte u, x, m, n, z im Freien bestimmen, worauf die gerade Linie im Freien durch Aushauen des Waldes wird hergestellt werden können.

*Man wird sich das Auftragen sehr erleichtern, wenn man die 3 Seiten eines jeden Dreieckes beiläufig gleich, oder die dritte viel kleiner macht.

§. 269.

Soll eine gegebene gerade Linie x a (Fig. 50.) durch ein Gebäude nach b und q verlängert werden, so errichte man auf den Punkt a einen Perpendikel a c, auf c einen weitern c d, auf d wieder den Perpendikel d b, welcher gleich a c gemacht werden muß, und nun auf b den Perpendikel b q, wodurch die verlangten Punkte b und q bestimmt sind.

*Steht statt eines Gebäudes eine fortlaufende Straße im Wege, so verfährt man am besten, wie bei Absteckung gerader Linien über Berge.

§. 270.

Soll die gerade Linie a b (Fig. 51.), wo man von dem Punkte a nach dem Punkte b eines dazwischen liegenden Hauses wegen

nicht visiren kann, gemessen werden, und soll zu dieser Linie eine Parallele mr ausgesteckt werden, so stecke man in a und b Stäbe ein, und befestige an jeden 2 von 4 ganz gleich langen Schnüren. An jedem der Endepunkte m, o, p, r dieser 4 Schnüre befestige man einen Absteckstab, und verbinde je zwei m und o, p und r dieser Absteckstäbe durch gleich lange Schnüre mo und pr. Nun stelle man die 4 Absteckstäbe an den Punkten m, o, p und r so, daß sie alle 4 in gerader Linie stehen, und daß überdieß die 6 Schnüre am, ao, mo, bp, br und pr vollkommen gespannt sind, so ist mr die verlangte Parallele zu ab, und mp oder or die Länge von ab.

§. 271.

Soll eine gerade Linie qn (Fig. 52.) über eine Grube oder einen Teich gemessen werden, so nehme man einen beliebigen Punkt m an, von welchem man nach q und n gelangen kann. Nun stecke man eine gerade Linie qm aus, und verlängere sie bis p, so daß mp = qm. Eben so stecke man eine gerade Linie nm aus, und verlängere sie bis o, so daß om = mn wird. Dadurch sind nun die Punkte o und p bestimmt. Zieht man nun zwischen diesen beiden Punkten eine gerade Linie, und mißt dieselbe, so erhält man dadurch die Länge der Linie qn, weil qn = op ist.

Könnte man im vorgegebenen Falle zum Punkte n nicht kommen, so müßte man qm messen, und sie über m hinaus bis nach p verlängern, so daß mp = qm würde, nun müßte man einen Winkel p abstecken so groß als Winkel q, und den zweiten Schenkel dieses Winkels p verlängern, bis er die verlängerte nm in einem Punkte schnitte, wodurch der Punkt o bestimmt, und ebenfalls po gezogen werden könnte, dessen Länge gleich der Länge von qn wäre.

Oder: man stecke, wenn beide Punkte q und n, zugänglich sind, in den Punkten q, m und n Stäbe ein,

welche sich einander decken, und einen vierten Stab stecke man ein in x, von wo aus man nach q und n ungehindert visiren und messen kann. Nun messe man den Winkel xqn, und die Linie ox, und trage sie in einem möglichst großen verjüngten Maßstabe auf Papier. Endlich messe man auch die Linie xn, fasse sie nach dem verjüngten Maßstabe in den Zirkel, reisse aus x mit dieser Zirkelöffnung einen Bogen, so wird dieser die verlängerte qm schneiden, und der Punkt n auf dem Papiere bestimmt werden. Nun kann man die Länge von qn bequem vom verjüngten Maßstabe herabnehmen.

§. 272.

Soll die Breite ac (Fig. 53.) eines Flußes gemessen werden, so messe man am Gestade eine gerade Linie ab, und merke sich jenseits des Flusses einen bestimmten Punkt c, welcher von b und a muß gesehen werden können. Nun ziehe man in der Richtung von ca eine Linie af rückwärts und messe den Winkel d, und bei b den durch Verlängerung der Linien ab und cb entstandenen Scheitelwinkel e. Bringt man nun ab nach dem möglichst größten verjüngten Maßstabe zu Papier, construirt an ihren Endepunkten die Winkel e und d, wie sie im Freien sind, so werden sich die verlängerten Schenkel dieser Winkel in einem Punkte schneiden, wodurch der Punkt c bestimmt, und die Länge ca vom verjüngten Maßstabe genommen werden kann.

§. 273.

Wenn eine gerade Linie ab (Fig. 54.) gemessen werden soll, wo man weder zu dem Punkte a noch zu dem Punkte b kommen kann, so nehme man zwei beliebige Standpunkte c und d an, von welchen beiden die Punkte a und b müssen gesehen werden können. Den Standpunkt c bezeichne man mit einem Absteckstabe, und messe auf dem Standpunkte d die Winkel bda und bdc, dann die Linie

cd. Dann lasse man einen Absteckstab in d stecken, und messe aus c die Winkel acd und acb. Nun trage man die Linie cd nach dem möglichst größten verjüngten Maßstabe auf Papier, und setze an den Endepunkt d die Winkel bdc und adb, an den andern Endepunkt c die Winkel acd und bcd, so wie sie auf dem Felde geordnet waren. Man verlängere alsdann die Schenkel dieser Winkel, bis sie sich in a und b durchschneiden, und ziehe die Linie ab, deren Länge nun auf dem verjüngten Maßstabe gefunden werden kann.

§. 274.

Soll eine krume Linie amneihb (Fig. 56.) durch eine gerade ab gemessen, und nach dem verjüngten Maßstabe zu Papier gebracht werden, so zeichne man die vorzüglichsten Beugungen der krummen Linie aus freyer Hand beiläufig auf ein Papier und ziehe die gerade Linie ab durch dieselbe, so wie man sie ungefähr auf dem Felde an der krummen Linie hinmessen will. Man messe dann wirklich von a bis c, und schreibe die Anzahl von Schuhen auf den Handriß, hier 12; errichte bei c eine senkrechte cm, messe auch diese, und schreibe die Anzahl von Schuhen ebenfalls in den Handriß, hier 5. Auf die nämliche Art verfahre man mit ad, dn, bemerke auch die Anzahl von Schuhen bei e, wo die gerade Linie von der krummen geschnitten wird; hier 36, und bestimme endlich nach der angegebenen Weise die Punkte f, i, g, h.

Will man nun die krumme Linie im verjüngten Maßstabe zu Papier bringen, so ziehe man eine gerade Linie, und trage auf selbe von a aus, die Entfernungen von 12, 20, 36, 41, 50, 56 Schuh, so sind dadurch die Punkte c, d, e, f, g und b bestimmt. Nun errichte man auf den Punkten c, d, f und g die 5, 8, 3 und 2 Fuß langen Perpendikel cm, dn, fi und gh. Endlich ziehe man die Punkte

a, m, n, e, i, h und b aus freier Hand zusammen, so wird man die krumme Linie mit hinlänglicher Genauigkeit erhalten.

*Die gerade Linie ab nennt man eine Absciſſen-Linie und die darauf errichteten senkrechten Linien heißen rechtwinkelige Ordinaten.

**Will man die obige krumme Linie messen, so betrachtet man die einzelnen Stücke derselben als gerade, und nimmt die Summe dieser geraden Linien als das Maß der krummen Linie an.

§. 275.

Soll eine krummlinige Figur (Fig. 52) im verjüngten Maßstabe zu Papier gebracht und gemessen werden, so umschließe man sie willkührlich mit einer geradlinigen qxnm. Man kann nach §. 274, die Seiten der geradlinigen Figur als Absciſſenlinien betrachten und darauf je mehr desto besser Ordinaten ziehen, was besonders leicht mit Hilfe des Winkelspiegels geht. Wie nun nach Anweisung des vorigen Paragraphs eine einzelne krumme Linie, so wird nach diesem die ganze krummlinige Figur leicht zu Papier gebracht werden können.

Hat man nun auch den Flächeninhalt einer solchen Figur anzugeben, so kann man auf eine der später anzugebenden Arten entweder die eingeschlossene Figur selbst messen, oder die einschließende Figur sammt der eingeschlossenen bestimmen, und die einschließende davon subtrahiren. Letzteres geschieht besonders, wenn die eingeschlossene Figur ein Wald u. dgl. ist.

§. 376.

Soll ein Platz (Fig. 57.) wagrecht abgeebnet werden, so lasse man mehrere Pfähle einschlagen, lege eine gerade Latte ab an dieselben,

stelle die Setzwage darauf, und bemerke bei a und b mit Linien die Höhe der Latte, wodurch man sehen kann, wie viel der Punkt c niederer ist als der Punkt d. Auf diese Art verfährt man mit allen eingeschlagenen Pfählen. Ist die Höhe überall richtig angezeigt, so weiß man wie viel Erde an einem Orte angeschüttet, und an einem andern hinweggenommen werden muß.

*Auf diese Art kann man auch das Gefäll eines laufenden Wassers in Bächen und Kanälen finden, welches man Nivelliren oder Abwägen des Wassers nennt, wenn die Linien, durch die man den Fall des Wassers untersuchen will, nicht zu lange sind. Denn wenn man auf die obige Art mehrere Pfähle an dem Ufer einschlägt, so wird der letzte, oder besser das vom obern Ende des letzten auf die Wasserfläche herabgelassene Senkblei, anzeigen, um wie viel der Wasserspiegel daselbst tiefer liegt als beim ersten Pfahl.

§. 277.

Soll das Gefäll des Wassers auf eine größere Strecke gefunden werden, so lasse man sich (Fig. 58.) eine gläserne Röhre a b von ungefähr 2 ½ Fuß Länge verfertigen, die an den beiden Enden a und b aufgebogen ist, und befestige dieselbe auf einem Stative (Gestelle) von Holz. In die Röhre gieße man rothgefärbtes Wasser, das sich in derselben hin und her bewegen kann, und bei e und f einen leeren Raum über sich zurückläßt. Da nach den Naturgesetzen das Wasser in den beiden aufwärtsgebogenen Schenkeln einer solchen Röhre immer gleich hoch stehen muß, so werden die beiden Punkte e und f immer in einer wagerechten Linie stehen, man mag das Instrument drehen und wenden, wie man will, wodurch dasselbe zum Nivelliren brauchbar wird.

Ferners läßt man sich eine Latte (Fig. 59.) von ungefähr 7 bis 8 Schuh Länge verfertigen, die in Schuhe, Zolle und Linien eingetheilt ist, und richtet

ein Querbretchen a, wovon die eine Hälfte weiß, die andere schwarz angestrichen ist, so, daß es sich an der Latte auf- und abschieben läßt.

Soll man nun (Fig. 60.) das Gefäll von einer Linie ab bestimmen, so stelle man das Instrument in ungefähr die Mitte dieser Linie, und richte es nach dem Punkte a. Nun stelle man sich etwas hinter das Instrument, sehe an den obersten Flächen des rothen Wassers vorbei nach der Latte a, und lasse sich das bewegliche Querbretchen so lange auf- und abschieben, bis die zwei Oberflächen des Wassers und die obere Linie des Bretchens sich decken; so wird dieses die Höhe ac nach Schuhen, Zollen und Linien bestimmen. Läßt mau ferners das Instrument unbeweglich stehen, und sieht nach dem Punkte b, so zeigt auch hier das Bretchen an der Latte die Höhe der Linie bd. Da nun cd vollkommen wagerecht ist, so erhält man den Fall von ab, wenn man ac von bd subtrahirt.

Das Gefäll von Linien, welche mehrere Standpunkte erfordern kann also eben so leicht erhalten werden, weil man nur um das Ganze zu finden, das Gefäll der einzelnen Theile der Linie addiren darf. Ereignet es sich, daß eine solche Linie manchmal steigt, und manchmal fällt, so müssen die Schuhe um welche sie gestiegen, und die um welche sie gefallen, in zwei Reihen gesetzt, und die Summe der einen Reihe von der Summe der andern subtrahirt werden, und der Rest wird zeigen, um wie viel die ganze Linie nach der einen oder andern Seite Gefäll habe.

*Man hat außer dem hier beschriebenen Instrumente noch weit vollkommnere, die aber für den gewöhnlichen Gebrauch zu hoch kommen, und darum hier nicht beschrieben werden. Das Verfahren aber bleibt im Allgemeinen das nämliche.

Planimetrie.

§. 278.

Unter Planimetrie (§. 245.) versteht man jenen Theil der Geometrie, welcher von den Flächen handelt.

Unter einer Fläche (§. 242.) versteht man eine Größe, bei welcher man blos auf Länge und Breite, aber nicht auf Dicke Rücksicht nimmt.

Wenn man an eine Fläche nach allen Richtungen gerade Linien so legen kann, daß letztere in allen ihren Punkten in die Fläche fallen (vollkommen an der Fläche anliegen), so nennt man die Fläche eine ebene Fläche oder Ebene*; kann man dieses nur nach Einer Richtung thun, so ist die Fläche eine einfach gekrümmte Fläche; kann man es nach gar keiner Richtung thun, so ist die Fläche eine nach allen Richtungen gekrümmte Fläche.

§. 279.

Eine Fläche welche von allen Seiten durch Linien vollkommen begränzt wird, heißt man eine Figur.

Jede einzelne Linie, welche die Figur begränzt, wird eine Seite der Figur genannt. Alle Seiten einer Figur zusammengenommen nennt man den Perimeter der Figur; wird eine Figur nur von einer einzigen krummen Linie begränzt, so nennt man sie die Peripherie der Figur. Eine gerade Linie, welche von dem Scheitel eines Winkels nach dem Scheitel eines gegenüberliegenden (nicht an derselben Linie liegenden) Winkels derselben Figur gezogen ist, heißt eine Diagonale.

Man unterscheide bei jeder Figur den Flächenraum derselben und ihre Peripherie oder ihren Perimeter; von letzterem wird der Flächenraum der Figur begränzt.

*So untersucht der Maurer, ob die Oberfläche der Wand eben sey, indem er gerade Linien (Latten) nach allen Richtungen an dieselbe legt, und sieht, ob diese in allen ihren Punkten vollkommen anliegen.

§. 280.

Die Figuren werden eingetheilt:

a) Nach der Beschaffenheit ihrer Seiten in geradlinige, welche von lauter geraden Linien begränzt werden; in krummlinige, welche von einer einzigen oder auch von mehreren (doch lauter) krummen Linien begränzt werden; in gemischtlinige, welche von geraden und krummen Linien begränzt werden.

b) Nach der Anzahl ihrer Seiten: in Dreiecke, Vierecke und Polygone oder Vielecke, je nachdem sie von drei, vier oder mehr als vier Seiten vollkommen begränzt werden. Man nennt sie Dreiecke, Vierecke u. s. f. wenn sie drei, vier u. s. w. Seiten haben, weil die Anzahl der Seiten und die der Winkel oder Ecke einer Fignr immer gleich ist. Die Polygone heißt man auch Fünfecke, Sechsecke, Zwanzigecke u. s. f., je nachdem sie von fünf, sechs oder zwanzig Seiten begränzt werden.

c) Nach der Größe ihrer Seiten und Winkel: in reguläre oder regelmäßige, wenn in einer Figur alle Seiten und Winkel einander vollkommen gleich sind; und in irreguläre oder unregelmäßige, wenn entweder nicht alle Seiten oder nicht alle Winkel einander vollkommen gleich sind.

d) Nach ihrem Flächeninhalte: in gleiche, wenn sie gleichen Flächeninhalt haben (ein Kreis ist einem Dreiecke gleich, wenn er eben so viele Quadratfuß hält als das Dreieck), und in ungleiche, wenn sie nicht gleichen Flächeninhalt haben.

e) Nach ihrer Gestalt: in ähnliche und unähnliche. Figuren sind einander ähnlich, wenn sich die einzelnen Theile in der einen Figur genau so zu einander verhalten wie in der andern. Widrigenfalls sind die Figuren unähnlich. Demnach müssen n der einen von zwei ähnlichen

Figuren alle Winkel der Ordnung nach genau so seyn wie in der andern; ferner muß jede Seite in der einen Figur genau so viele Schuh, Zoll u. dgl. halten, als die entsprechende Seite in der größern Ruthen oder Meilen u. s. w. hält. Es sind also die Zeichnungen im verjüngten Maßstabe und die Flächen, welche durch sie dargestellt werden, einander ähnlich.

f) Nach ihrem Flächeninhalte und ihrer Gestalt: in congruente, wenn sie gleich und ähnlich sind, und in nicht congruente, wenn dieses nicht der Fall ist. Congruente Figuren müssen sich demnach so aufeinander legen lassen, daß sich alle Seiten und Winkel einander vollkommen decken.

§. 281.

Unter einem Dreiecke versteht man eine Figur, welche von drei Seiten vollkommen begränzt wird.

Eine Seite des Dreieckes, gleichviel welche, heißt die Grundlinie oder Basis des Dreieckes; den Scheitel des Winkels, welcher der Grundlinie gegenüber liegt, nennt man die Spitze des Dreieckes; ein Perpendikel, von der Spitze auf die Grundlinie gefällt, wird die Höhe des Dreieckes genannt.

§. 282.

Die Dreiecke werden eingetheilt:

a) Nach der Größe ihrer Seiten: in gleichseitige, in welchen alle drei Seiten einander gleich sind; in gleichschenkelige, in welchen blos zwei Seiten einander gleich sind; in ungleichseitige, in welchen keine Seite der andern gleich ist.

b) Nach der Größe ihrer Winkel: in spitzwinkelige, in welchen drei spitze Winkel vorkommen; in rechtwinkelige, in wel-

chen ein rechter Winkel vorkommt; in stumpfwinkelige, in welchen ein stumpfer Winkel vorkommt.

Im rechtwinkeligen Dreiecke heißt man jene Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, die Hypothenuse; jene zwei Seiten aber, welche die Schenkel des rechten Winkels bilden, werden die beiden Katheten genannt.

§. 283.

Ein Dreieck kann gezeichnet werden (ist bestimmt),

a) wenn alle drei Seiten gegeben sind;

b) wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind;

c) wenn zwei Seiten und der der größeren von diesen Seiten gegenüber liegende Winkel gegeben sind;

d) wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.

Wenn alle drei Seiten ab, ac und bc (Fig. 61.) eines Dreieckes gegeben sind, ziehe man eine gerade Linie, und mache sie gleich ab; nun reisse man aus a mit der Zirkelöffnung ac oberhalb ab einen Bogen; eben so reisse man aus b mit der Zirkelöffnung bc einen Bogen, welcher den ersteren in c schneidet. Nun ziehe man die geraden Linien ac und bc.

Wenn zwei Seiten ab und ac und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind (Fig. 62.), ziehe man die gerade Linie ab, mache den Winkel a gleich dem gegebenen Winkel a, seinen zweiten Schenkel gleich dem gegebenen ac, so ist der Punkt c bestimmt. Zieht man nun die gerade Linie cb, so ist das Dreieck construirt.

Wenn zwei Seiten ac und cb und der der größern von diesen Seiten gegenüberliegende Winkel a eines Dreieckes (Fig. 62.) gegeben sind, so ziehe man eine gerade Linie, und mache sie gleich ac, (gleich der Seite, deren anliegender Winkel gegeben ist); nun mache man

den Winkel a gleich dem gegebenen Winkel a, und verlängere seinen zweiten Schenkel bis zu einer gewissen Punkte; endlich reisse man aus c mit der Zirkelöffuung cb einen kleinen Bogen, welcher den unbestimmt verlängerten Schenkel des Winkels a in b schneidet, so wird dadurch der Punkt b bestimmt. Zieht man nun die gerade Linie cb, so ist das Dreieck aufgezeichnet.

Wenn eine Seite ab und zwei Winkel a und b (Fig. 63.) gegeben sind, ziehe man eine gerade Linie, und mache sie gleich ab; nun mache man den Winkel a gleich dem gegebenen Winkel a, den Winkel b gleich dem gegebenen Winkel b, und verlängere die beiden Schenkel der letzteren, bis sie sich in c schneiden.

§. 284.

Ein gleichseitiges Dreieck acb (Fig. 64.) wird auf folgende Art gezeichnet: Man ziehe eine gerade Linie ab, und reisse aus a und b mit der Zirkelöffnung ab zwei Kreuzbögen, welche sich in c schneiden; nun ziehe man die geraden Linien ac und cb.

Will man auch die Höhe eines solchen Dreieckes erhalten, so reisse man, wenn man ab als Grundlinie betrachtet, aus a und b unterhalb ab zwei Kreuzbögen, welche sich in u schneiden, wenn sie mit der Zirkelöffnung ab gerissen wurden, oder in o, wenn man sie mit einer kleineren Zirkelöffnung gerissen hat, oder auch in p, wenn sie mit einer größeren Zirkelöffnung gerissen wurden. Endlich ziehe man die gerade Linie co, oder cu oder cp, welche ab in m schneidet, so ist cm die Höhe des Dreieckes.

§. 285.

Ein gleichschenkeliges Dreieck acb (Fig. 65.) kann gezeichnet werden, wenn die Grundlinie

ab und ein Schenkel ac gegeben ist. Man ziehe nämlich die Linie ab, und reisse aus a und b mit der Zirkelöffnung ac zwei Bögen, welche sich in c schneiden. Nun ziehe man die geraden Linien ac und cb.

Die Höhe eines gleichschenkeligen Dreieckes wird auf dieselbe Weise gefunden, wie die eines gleichseitigen.

§. 286.

Soll die Höhe eines ungleichseitigen Dreieckes acb (Fig. 61.) gefunden werden, so reisse man, wenn ab als Grundlinie betrachtet wird, aus c mit beliebiger Zirkelöffnung einen Bogen, welcher die Grundlinie in zwei Punkten m nnd x schneidet. Nun reisse man aus m und x mit einer Zirkelöffnung, welche größer ist als die Hälfte von mx, unterhalb ab zwei Bögen, welche sich in p schneiden. Zieht man nun die gerade Linie cp, so wird dadurch ab in o geschnitten, und co ist die gesuchte Höhe des Dreieckes.

Nimmt man in einem stumpfwinkeligen Dreiecke (Fig. 66.) eine der beiden kürzeren Seiten des Dreieckes als Grundlinie an, so kann auf diese von der Spitze des Dreieckes kein Perpendikel gefällt werden. In diesem Falle verlängert man die Grundlinie am über m hinaus, reißt mit beliebiger Zirkelöffnung aus c einen Bogen, welcher die verlängerte Grundlinie in den Punkten g und q schneidet, und reißt aus den zwei letzteren Punkten unterhalb gq zwei Bögen, welche sich in p schneiden. Zieht man nun die gerade Linie cp, so wird von dieser die verlängerte Grundlinie in dem Punkte u geschnitten, und cu ist die gesuchte Höhe des Dreieckes.

§. 287

Die drei Winkel eines jeden Dreieckes (Fig. 67.) halten zusammengenommen 180 Grade $a + c + b = 180°$.

Beweis. Man ziehe durch die Spitze c des Dreieckes eine Parallele mit der Grundlinie, und verlängere die beiden Schenkel des Dreieckes durch die Spitze c.

Nun ist $m = b$
$$o = c$$
$$x = a$$
$$m + o + x = a + c + b$$
$$m + o + x = 180^\circ$$
$$a + c + b = 180^\circ$$

Wenn also in einem Dreiecke zwei Winkel a und b bekannt sind, so ist es auch der dritte c; man darf nur die Summe der Grade der beiden bekannten Winkel oder $a + b$ von 180 Graden subtrahiren, so bleiben die Grade des Winkels c.

In keinem Dreiecke können zwei rechte, oder zwei stumpfe, oder ein rechter und ein stumpfer Winkel vorkommen, weil je zwei solche Winkel 180 oder mehr als 180 Grade hielten, so daß für den dritten Winkel nichts übrig bliebe.

§. 288.

Ein Winkel d (Fig. 68.), welcher durch Verlängerung irgend einer Seite eines Dreieckes entsteht, wird ein äußerer Winkel genannt.

Der äußere Winkel ist gleich der Summe der beiden inneren ihm gegenüber liegenden Winkel.

$$d = a + c$$

Bew. $d + b = 180^\circ$
$$a + c + b = 180^\circ$$
$$d + b = a + c + b$$
$$-b = -b$$
$$d = a + c$$

§. 289.

Dreiecke sind congruent, d. i. sie lassen sich so aufeinander legen, daß sich alle Seiten und Winkel einander vollkommen decken, (haben gleiche Größe und gleiche Gestalt):

1.) wenn alle drei Seiten in einem Dreiecke genau so sind, wie in dem andern;

2.) wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel in einem Dreiecke genau so sind, wie in dem andern;

3.) wenn zwei Seiten und der der größern von diesen Seiten gegenüber liegende Winkel in einem Dreiecke genau so sind, wie in dem andern;

4.) wenn eine Seite und zwei Winkel in einem Dreiecke genau so sind, wie eine Seite und zwei gleichliegende Winkel im andern. (Sieh §. 283.)

Bew. ad 1.) Es sey in den beiden Dreiecken amq und oxz (Fig. 69.) aq = oz, am = ox, mq = xz. Denkt man sich nun das Dreieck amq so auf das Dreieck oxz gelegt, daß der Punkt a auf den Punkt o und die Seite aq auf die Seite oz zu liegen kommt, so muß auch der Punkt q auf den Punkt z zu liegen kommen, weil aq = oz ist. Denn fiele der Punkt q über z hinaus, so müßte aq offenbar größer seyn als oz, und fiele der Punkt q über z herein, so müßte aq offenbar kleiner seyn als oz; beides aber wäre gegen die Annahme. Da nun q weder über z hinaus noch herein, und auch nicht seitwärts fallen kann, weil sonst aq nicht mehr auf oz liegen würde, so muß q auf z selbst fallen. Liegt aber aq so auf oz, daß der Punkt a auf dem Punkte o, und der Punkt q auf dem Punkte z liegt, so muß auch die Seite am auf die Seite ox zu liegen kommen; denn fiele am über ox heraus, wie og, so müßte mq offenbar größer seyn als xz, was gegen die Annahme wäre; und fiele am über ox herein, wie oy, so müßte mq offenbar kleiner seyn als xz, was ebenfalls gegen die Annahme wäre. Da nun am weder über ox hinaus noch hinein fallen kann,

so muß es wohl auf ox selber fallen. Liegt aber am so auf ox, daß a auf o liegt, so muß auch m auf x zu liegen kommen, weil ja am = ox ist.

Es ist nun nachgewiesen, daß der Punkt a auf dem Punkte o, der Punkt q auf dem Punkte z, und der Punkt m auf dem Punkte x liege. Da zwischen je zwei Punkten nur Eine gerade Linie möglich ist, so ist dadurch auch nachgewiesen, daß die entsprechenden Seiten auf einander liegen, mithin dargethan, daß die beiden Dreiecke congruent seyen.

Bew. ad 2.) Wenn in den beiden Dreiecken adm und oxz (Fig. 70) die Seite am = oz, ad = ox und der Winkel a = o ist, so sind die Dreiecke congruent.

Man denke sich das Dreieck adm so auf das Dreieck oxz gelegt, daß der Punkt a auf den Punkt o und die Seite am auf die Seite oz zu liegen kommt. Ist dieß der Fall, so muß auch der Punkt m auf den Punkt z zu liegen kommen, weil am = oz ist. Liegt aber am so auf oz, daß der Punkt a auf dem Punkte o und der Punkt m auf dem Punkte z liegt, so muß auch die Seite ad auf die Seite ox zu liegen kommen, weil der Winkel a = o ist. Denn fiele die Seite ad über ox hinaus, wie ou, so müßte offenbar der Winkel a größer seyn als der Winkel o, was gegen die Annahme wäre; fiele aber die Seite ad über ox herein, wie oy, so müßte der Winkel a offenbar kleiner seyn, als der Winkel o, was wieder gegen die Annahme wäre. Da nun die Seite ad weder über ox hinaus noch herein fallen kann, so muß sie auf ox selber fallen. Liegt aber ad so auf ox, daß der Punkt a auf den Punkt o fällt, so muß auch der Punkt d auf den Punkt x fallen, weil ja ad = ox ist. Es ist nun nachgewiesen, daß der Punkt a auf den Punkt o, der Punkt m auf den Punkt z, und der Punkt d auf den Punkt x zu liegen kommt, mithin auch erwiesen, daß die entsprechenden Seiten auf einander fallen, und folglich dargethan, daß die beiden Dreiecke congruent seyen.

Bew. ad 3.) Wenn in den beiden Dreiecken abc

und def (Fig. 71.) die Seite ab = de, die Seite bc = ef und der Winkel a = d ist, so sind die Dreiecke congruent.

Man denke sich das Dreieck abc so auf das Dreieck def gelegt, daß der Punkt a auf den Punkt d, und die Seite ab auf die Seite de zu liegen komme. Ist dieß der Fall, so muß auch der Punkt b auf den Punkt e zu liegen kommen, weil ab = de ist. Liegt aber ab so auf de, daß der Punkt a auf dem Punkte d, und der Punkt b auf dem Punkte e liegt, so muß auch die Seite ac auf die Seite df zu liegen kommen, weil der Winkel a = d ist. Liegt aber ac so auf df, daß der Punkt a auf dem Punkte d liegt, so muß auch der Punkt c auf dem Punkte f liegen. Denn fiele c über f herein, wie m, so müßte bc offenbar kleiner seyn als ef, was gegen die Annahme wäre, und fiele c über f hinaus, wie q, so müßte bc offenbar größer seyn als ef, was ebenfalls gegen die Annahme wäre. Da nun c weder über f herein noch hinaus, und auch nicht seitwärts fallen kann, weil sonst ac nicht mehr auf df liegen würde, so muß es auf f selber fallen. Es ist nun nachgewiesen, daß der Punkt a auf dem Punkte d, der Punkt c auf dem Punkte f, und der Punkt b auf dem Punkte e liege. Da zwischen je zwei Punkten nur Eine gerade Linie möglich ist, so ist folglich auch dargethan, daß die entsprechenden Seiten aufeinander liegen, mithin erwiesen, daß die beiden Dreiecke congruent seyen.

Bew. ad 4.) Es sey in den Dreiecken mxo und pzq (Fig. 72.) die Seite mo = pq, und der Winkel m = p, so wie der Winkel o = q. Ist dieß der Fall, so müssen die beiden Dreiecke congruent seyn.

Man denke sich das Dreieck mxo so auf das Dreieck pzq gelegt, daß der Punkt m auf den Punkt p und die Seite mo genau auf die Seite pq zu liegen kommt. Ist dieß der Fall, so muß auch der Punkt o auf den Punkt q zu liegen kommen, weil mo = pq ist. Liegt aber mo so auf pq, daß der Punkt m auf dem Punkte p und der Punkt o auf dem Punkte q liegt, so muß auch die Seite mx auf die Seite pz

zu liegen kommen, weil der Winkel m gleich ist dem Winkel p. Liegt aber mx so auf pz, daß der Punkt m auf dem Punkte p liegt, so muß auch der Punkt x auf den Punkt z zu liegen kommen. Denn fiele x über z herein, wie u, so müßte xo wie uq liegen, und der Winkel o würde offenbar kleiner seyn als der Winkel q; fiele aber der Punkt x über z hinaus, etwa wie k, so müßte xo wie kq zu liegen kommen, und der Winkel o müßte offenbar größer seyn als der Winkel q. Beides aber wäre gegen die Annahme. Da nun der Punkt x weder über z herein noch hinaus und auch nicht seitwärts fallen kann, weil sonst mx nicht mehr auf pz liegen würde, so muß wohl x auf z selber fallen. Es ist nun nachgewiesen, daß der Punkt m auf dem Punkte p, der Punkt o auf dem Punkte q und der Punkt x auf dem Punkte z liege; mithin auch gezeigt, daß die entsprechenden Seiten aufeinander liegen, und folglich dargethan, daß die Dreiecke congruent seyen.

*Aus diesem Paragraph suche man die Gründe des in §. 232. 255. Gesagten herzuleiten.

§. 290.

Ein Perpendikel cm, welcher von der Spitze c eines gleichseitigen oder auch gleichschenkeligen Dreieckes abc (Fig. 64. und 65.) auf dessen Grundlinie ab gefällt wird, zertheilt das Dreieck in zwei congruente Dreiecke, und die Grundlinie in zwei gleiche Hälften.

$$acm \cong bcm$$

Bew. Die Seite ac des Dreieckes acm ist gleich der Seite bc des Dreieckes bcm, auch ist die Seite cm des Dreieckes acm gleich der Seite cm des Dreieckes bcm; ferner ist der Winkel amc des Dreieckes acm gleich dem Winkel bmc des Dreieckes bcm, weil beide rechte Winkel sind. Es sind

also zwei Seiten und der der größeren von diesen Seiten gegenüberliegende Winkel in einem Dreiecke wie im andern; folglich sind die beiden Dreiecke (nach §. 289. 3.) congruent.

Da bei congruenten Dreiecken (nach §. 289. 1.) auch alle Seiten der Ordnung nach in dem einen Dreiecke sind wie in dem andern, so müßen in den oben bezeichneten Dreiecken acm und bcm auch die Seiten am und mb einander gleich seyn, gleichwie es die Seiten ac und cb, cm und mc sind.

Da bei congruenten Dreiecken (nach §. 289. 2.) zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel in dem einen Dreiecke genau so sind, wie in dem andern, so müssen in den oben bemerkten congruenten Dreiecken acm und bcm die Winkel a und b einander gleich seyn, weil die beiden Seiten ac und am, welche den Winkel a einschließen, genau so sind, wie die beiden Seiten cb und mb, die den Winkel b einschließen. Es liegen demnach im gleichseitigen und gleichschenkeligen Dreiecke den gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüber. Da im gleichseitigen Dreiecke alle drei Seiten einander gleich sind, so könnte man dadurch, daß man bc als Grundlinie annähme, und auf diese von a einen Perpendikel fällte, auf gleiche Art beweisen, daß der Winkel b gleich sey dem Winkel c. Da nun $c = b$ und $a = b$, so muß auch $a = c$ seyn. Es sind also im gleichseitigen Dreiecke alle drei Winkel einander gleich. Weil daher im gleichseitigen Dreiecke alle Seiten einander gleich, und alle Winkel einander gleich (jeder $= 60°$) sind, so ist das gleichseitige Dreieck eine reguläre Figur. (§. 280. c.)

Ist in einem gleichschenkeligen Dreiecke Ein Winkel bekannt, so sind es auch die beiden andern. Weiß man z. B. daß der Winkel c des Dreieckes $acb = 100°$ ist, so darf man nur 100 von 180 subtrahiren, und man erfährt daß $a + b = 80°$ ist, weil ja $a + b + c = 180°$ ist. Da nun $a = b$, so darf man nur 80 durch 2 dividiren, und man erfährt, daß

a oder auch b = 40° ist. Wäre vom Winkel a oder b bekannt, daß er 40° halte, so brauchte man nur 40 mit 2 zu multipliziren, und man wüßte daß a + b = 80°. Da nun a + b + c = 180°, so brauchte man nur 80 von 180 zu subtrahiren, und man erführe daß c = 100°.

§. 291.

Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.

Wenn nämlich (Fig. 34.) qb und cm, cq und mb parallel sind,

so ist W. qbc = W. mcb, } §. 262.
ferner W. qcb = W mbc. }

Da nun in dem Dreiecke qcb die Seite cb mit den beiden anliegenden Winkeln genau so ist, wie die Seite cb des Dreieckes cbm mit den beiden anliegenden Winkeln, so müssen die beiden Dreiecke congruent seyn, folglich müssen in beiden den gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüberliegen,

folglich cm = qb, cq = mb.

Mithin sind Parallelen zwischen Parallelen einander gleich.

Eben so sind alle Perpendikel zwischen Parallelen auch unter sich parallel und daher einander gleich.

Wenn nämlich (Fig. 34.) qb und cm parallel sind; wenn fernerqc und bm Perpendikel zwischen beiden sind,

so muß der Winkel aqc = R,
mithin auch bqc = R,
ferner auch qbm = R,
also auch xbm = R seyn.
mithin aqc = qbm,
und so auch bqc = xbm.

Da nun der äußere und innere Winkel auf einer Seite der schneidenden Linie nur gleich seyn können, wenn qc und bm parallel sind, so müssen Perpendikel zwischen Parallelen auch unter sich parallel, und als Parallelen zwischen Parallelen einander gleich seyn.

§. 292.

Jede geradlinige Figur läßt sich durch Diagonalen, die sich einander nicht schneiden, in n — 2 Dreiecke zertheilen, wenn n die Anzahl der Seiten dieser Figur bedeutet. (Siehe Fig. 14. und 25.) Man erhält daher die Summe der Grade aller Winkel einer Figur, wenn man n — 2 mit 180 multiplizirt, weil die drei Winkel eines jeden Dreieckes 180 Grade, also die Winkel von n — 2 Dreiecken n — 2mal 180 Grade halten.

Es halten also die 4 Winkel eines Viereckes zusammengenommen 360 Grade oder 4 — 2 d. i. zweimal 180 Grade; die 5 Winkel eines Fünfeckes 540 Grade oder 5 — 2 d. i. dreimal 180 Grade u. s. w.

§. 293.

Die Vierecke werden eingetheilt in Parallelogramme und in Trapeze. Ein Parallelogramm ist ein solches Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Seiten gleich und parallel sind.

Zu den Parallelogrammen gehören:

1.) Das Quadrat (Fig. 73.), in welchem alle vier Seiten gleich und alle vier Winkel gleich, d. i. rechte Winkel (§. 292.) sind.

2.) Das Rechteck, Rectangulum, Oblongum, (Fig. 74.), in welchem alle vier Winkel gleich, d. i. rechte Winkel sind, und in welchem die ge-

genüberliegenden Seiten gleich, die anstossenden Seiten aber ungleich sind.

3.) Die Raute oder der Rhombus (Fig. 75.) in welcher alle vier Seiten und die gegenüber liegenden Winkel gleich sind, doch so, daß in der Figur zwei spitzige und zwei stumpfe Winkel vorkommen. Man nennt sie auch das verschobene Quadrat.

4.) Die längliche Raute oder Rhomboide (Fig. 76.), in welcher die gegenüber liegenden Seiten gleich, die anstossenden Seiten aber ungleich sind, und in welcher auch die gegenüber liegenden Winkel gleich sind, doch so, daß in der Figur zwei spitzige und zwei stumpfe Winkel vorkommen. Man nennt sie auch das verschobene Rechteck.

Ist in einem Vierecke nur Ein Paar der gegenüber liegenden Seiten parallel, so nennt man es ein Trapez; ist in einem Vierecke gar kein Paar der gegenüber liegenden Seiten parallel, so wird es ein Trapezoid genannt.

§. 294.

Um ein Quadrat abcd zu zeichnen (Fig. 73) braucht man nur Eine Seite ad zu kennen. Man ziehe nämlich die Linie ad von der bekannten Größe, errichte auf a einen Perpendikel ab, mache diesen eben so groß als ad, reisse nun aus b und d mit der Zirkelöffnung ad zwei Bögen, welche sich in c kreuzen, und ziehe die geraden Linien bc und dc.

§. 295.

Um ein Rechteck abcd zu zeichnen (Fig. 74.) braucht man blos zwei anstossende Seiten ad und ab zu kennen. Man ziehe nämlich eine der gegebenen Seiten etwa ad von der verlangten Größe, und errichte auf a einen Perpendikel ab ebenfalls von der

bekannten Größe. Nun reisse man aus b mit der Zirkelöffnung ad und aus d mit der Zirkelöffnung ab zwei Bögen, welche sich in c schneiden, und ziehe endlich die geraden Linien bc und dc.

§. 296.

Um eine Raute abcd (Fig. 75.) zu zeichnen, braucht man blos eine Seite ad und einen Winkel a zu kennen. Man ziehe nämlich ad von der verlangten Größe, errichte auf a einen Winkel von der ebenfalls verlangten Größe, mache ab = ad und reisse nun aus d und b mit der Zirkelöffnung ad zwei Bögen, welche sich in c kreuzen. Nun braucht man nur die geraden Linien bc und cd zu ziehen.

§. 297.

Um eine längliche Raute abcd (Fig. 76.) zu zeichnen, braucht man nur zwei anstossende Seiten ad und ab und einen Winkel a zu kennen. Man zieht nämlich ad von der verlangten Größe, errichtet auf a einen Winkel von der ebenfalls gegebenen Größe, und macht seinen zweiten Schenkel ab so groß als es verlangt wurde. Nun reisse man aus b mit der Zirkelöffnung ad und aus d mit der Zirkelöffnung ab zwei Bögen, welche sich in c kreuzen, und ziehe endlich die geraden Linien bc und dc.

§. 298.

Ein Trapez oder Trapezoid (Fig. 77.) kann gezeichnet werden:

1.) Wenn man alle vier Seiten cd, ca, ab, db, und einen Winkel, etwa c mißt. Man ziehe nämlich cd von der verlangten Länge, und setze an c einen Winkel ebenfalls von der verlangten Größe, dessen zweiten Schenkel man gleich ca macht. Nun reisse man aus a mit der gegebenen Länge von ab, und aus d mit der

gegebenen Länge von db zwei Bögen, welche sich in b schneiden; endlich ziehe man die geraden Linien ab und db.

2.) Man ziehe die Diagonalen cb und ad, wodurch der Punkt m bestimmt wird. Nun messe man die Linien ma, md, mb, mc, und eine, etwa ab, von den vier Seiten des Trapezoides. Zieht man nun ab von der verlangten Größe, reißt dann aus a mit der Weite am, und aus b mit der Weite bm zwei Bögen, welche sich in m schneiden, so kann man die Linien bm und am ziehen, durch deren Verlängerung bis d und c (was bei den bekannten Längen von md und mc sehr leicht geschehen kann) alle Endepunkte des Trapezoides bestimmt sind, und durch gerade Linien zusammengezogen werden können.

§. 299.

Der Flächeninhalt eines Rechteckes abcd (Fig. 78.) wird gefunden, wenn man zwei anstossende Seiten, wovon man eine die Grundlinie, die andere die Höhe des Rechteckes nennt, mit einander multiplizirt.

Bew. Wenn die Seite ab genau n Schuhe hält, so wird man an selbe auch nmal einen Quadratschuh, legen können, so daß diese Reihe von n solchen Quadratschuhen genau von a bis b reicht, weil ja an jeden Schuh von ab ein Quadratschuh gelegt werden kann. Diese ganze Reihe von n Quadratschuhen aber nimmt von der Seite ac nur Einen Schuh weg, und man wird an ac auch q solcher Reihen von n Quadratschuhen anlegen können, wenn ac genau q Schuh mißt. Da nun das ganze Rechteck mit q Reihen von n Quadratschuhen belegt werden kann, so ist klar, daß der Flächeninhalt des Rechteckes gleich sey qmal n Quadratschuhen.

*Hätte man die Länge der Seiten ab und ac in Ruthen oder Meilen oder Ellen angegeben, so würde man durch Multi=

plikation derselben den Flächeninhalt des Rechteckes in Quadrat-Ruthen, Meilen oder Ellen erhalten.

Da das Quadrat auch ein Rechteck ist, in welchem jedoch alle Seiten einander gleich sind, so braucht man, um den Flächeninhalt eines Quadrates zu finden, nur eine Seite zum Quadrate zu erheben, d. i. mit sich selbst zu multiplizieren.

Da man sich ein Stück Tuch, eine Rolle Tapeten u. s. w. wenn sie ganz eben und ohne Falten ausgebreitet sind, als ein Rechteck denken kann, so multiplizirt man auch hier die Länge mit der Breite (zwei anstossende Seiten), und erhält so den Flächeninhalt derselben in Quadrat-Ellen.

Wenn (in Fig. 78.) die Seite ab genau 5 Schuh, und die Seite ac genau 3 Schuh mißt, so hält das Rechteck 3mal 5 d. i. 15 Quadratschuh.

Wäre der Flächeninhalt und eine Seite des Rechteckes bekannt, so dürfte man nur den Flächeninhalt des Rechteckes durch die bekannte Seite dividiren, und würde als Quotienten die Länge der anstossenden Seite erhalten.

Ist der Flächeninhalt eines Quadrates gegeben, so braucht man nur die Quadratwurzel auszuziehen, um die Seite des Quadrates zu finden.

§. 300.

Aufgabe. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechteckes, wovon eine Seite 14 Schuh 8 Dezimalzoll, die andere aber 9 Schuh und 10 Duodezimalzoll hält?

Auflösung. Vor allen Dingen mache man die Dezimalzolle zu Duodezimalzollen oder umgekehrt. Da man so oft 10 Dezimalzolle hat, als man 12 Duodezimalzolle besitzt, so dividire man in die gegebenen Duodezimalzolle mit 12, um zu erfahren, wie oft man 12 Duodezimalzolle habe, und multiplizire den Quotienten mit 10.

$$\frac{10 \times \overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{6}{\cancel{12}}} = \frac{50}{6} = 8\tfrac{2}{6} = 8\tfrac{1}{3}$$

Oder: x Dezimalzoll (geben) $\cancel{10}$ Duodez. Z.
Wenn $\cancel{12}$ Duodez. Z. = $\cancel{10}$ Dez. Z.

$\cancel{6}$	5
$\cancel{3}$	5
3	$25 = 8\frac{1}{3}$

Wollte man die Dezimalzolle zu Duodezimalzollen machen:

x Duodez. Z. (geben) $\cancel{8}$ Dez. Z.
Wenn $\cancel{10}$ Dez. Z. = 12 Duodez. Z.

5	4
5	$48 = 9\frac{3}{5}$

Nun nehme man an 14′ 8″ und 9′ $8\frac{1}{3}$″ weil mit Dezimalzollen leichter zu rechnen ist.

Nun mache man 14′ 8″ und 9′ $8\frac{1}{3}$″ zu lauter Dezimalzollen:

14′ 8″ = 148″
9′ $8\frac{1}{3}$″ = $98\frac{1}{3}$″
1184
1332
$49\frac{1}{3}$ (das Drittel von 148 gleich dazu addirt.)

$14553\frac{1}{3}$ Quadratzoll.

Da nun ein Quadratschuh 100 Dezimalquadratzoll hält, so darf man nur die zwei letzten Ziffern abstreichen, um die Q. Zoll in Q. Schuh zu verwandeln.

Der Flächeninhalt des Rechteckes ist folglich 145 Q. Schuh und $53\frac{1}{3}$ Dez. Q. Zoll.

Wollte man die Dez. Q. Zoll in Duodez. Q. Zoll verwandeln:

x Duodez. Q. Zoll (betragen) 53 $\frac{1}{3}$ Dez. Q. Z.

Wenn 100 Dez. Q. Zoll = 144 Duodez. Q. Z.

3 | 160
·5 | 48
| 8

5 | 384 = 76$\frac{4}{5}$

Demnach wäre der Flächeninhalt des Rechteckes = 145 Q. F. 76$\frac{4}{5}$ Duodez. Q. Zoll.

§. 301.

Aufgabe. Ein Rechteck hält 94 Q. F. 7 Dez. Q. Zoll, und seine Höhe beträgt 5′ 7 Dez. Z. Wie groß ist die Grundlinie dieses Rechteckes?

Auflösung.

94 Q. F. 7 Dez. Q. Z. = 9407 Dez. Q. Zoll.
5′ 7 Dez. Zoll = 57 Dez. Zoll.

9407 : 57 = 165$\frac{2}{57}$ Dez. Zoll.
370
287
2

Die Grundlinie des Rechteckes beträgt also 165$\frac{2}{57}$ Dez. Zoll oder 16′ 5$\frac{2}{57}$ Dez. Zoll.

Will man $\frac{2}{57}$ Dez. Z. zu Dez. Linien machen, so multiplizire man den Bruch mit 10 oder wenn man da keine Ganze erhält, gleich mit 100 um Dezimal-Punkte zu erhalten — oder man verwandle $\frac{2}{57}$ in einen Dezimalbruch.

$\frac{2}{57}$ = 0,03

Da nun 0,03 Dez. Zoll = 3 Dez. Punkte, so könnte man statt dessen 3 Dez. Punkte setzen, obwohl man lieber 0,03 stehen läßt, und sagt: die Grundlinie hält 16 Schuh, 5,03 Dez. Zoll.

*Von nun an werden unter Zoll immer Dezimalzoll verstanden.

§. 302.

Der Flächeninhalt einer Raute abcd (Fig. 75.), oder auch einer länglichen Raute (Fig. 76.) **wird gefunden**, wenn man die Grundlinie ad mit der Höhe do multiplizirt.

*Unter der Höhe einer Raute versteht man einen Perpendikel, welcher auf einen beliebigen Punkt der als Grundlinie angenommenen Seite von irgend einem Punkte der gegenüber liegenden Seite gefällt ist.

$$abcd = ad \times do$$

Bew. $abcd = abod + odc$

Da $mab = odc$

$$\backsim$$

so ist $abcd = abod + mab$

$amod = abod + mab$

$amod = abcd$

$amod = ad \times do$

$$abcd = ad \times do$$

Ist die Grundlinie einer Raute oder Rhomboide bekannt und ihr Flächeninhalt, so findet man die Höhe, wenn man mit der Grundlinie in den Flächeninhalt dividirt. Eben so findet man die Grundlinie, wenn man mit der Höhe der Raute in den Flächeninhalt dividirt.

Gesetzt, es soll eine Raute von 200 Quadrat Fuß ausgesteckt werden, deren Seite 18′ beträgt. Wie groß ist die Höhe und wie hat man hier überhaupt zu verfahren?

Auflösung. $200 : 18 = 11\frac{1}{9}$ Fuß ist die Höhe.

Nun stecke man eine 18′ lange Linie ad (Fig. 75.) aus, und errichte auf ihren Endpunkten a und d

Perpendikel am und do von je $11\frac{1}{9}$ Fuß. Nun ziehe man eine gerade Linie mo, welche über o hinaus unbestimmt zu verlängern ist. Nun setze man eine 18 Fuß lange Latte oder Schnur so an a, daß ihr anderes Ende genau bis an die Linie mo reicht, so wird dadurch der Punkt b bestimmt. Auf die nämliche Weise setzt man dieselbe Latte in d an, und bestimmt dadurch den Punkt c. Zieht man nun die Punkte a und b, b und c, c und d, d und a durch gerade Linien zusammen, so ist die Raute gezeichnet.

§. 303.

Den Flächeninhalt eines Dreieckes findet man, wenn man die Grundlinie mit der Höhe *) multiplizirt und das Produkt durch 2 dividirt.

*Wie jener Punkt der Grundlinie, auf welchen von der Spitze ein Perpendikel gefällt werden kann, gefunden werde, geht aus §. 256 hervor.

(Fig. 73 und 74.) $adc = \frac{ad \times dc}{2}$

badc ist offenbar ein Rechteck. Dieses Rechteck wird wie jedes Parallelogramm durch die Diagonale ac in zwei congruente Dreiecke bac und adc, wovon also jedes $= \frac{1}{2}$ badc getheilt. (Es sind nämlich alle drei Seiten der Ordnung nach in dem einen dieser Dreiecke wie in dem andern.)

Nun ist $badc = ad \times dc$

Also $\frac{badc}{2} = \frac{ad \times dc}{2}$

Da $\frac{badc}{2} = adc$

so ist $adc = \frac{ad \times dc}{2}$

So auch in Fig. 80 $abd = \frac{ad \times bm}{2}$

Bew. Man reisse aus dem Punkte b mit der Zirkelöffnung ad aus dem Punkre a mit der Zir-

kelöffnung db zwei Bögen, welche sich in e schneiden, so entsteht die Rhomboide acbd.

Nun ist $acbd = ad \times bm$

Also $\frac{acbd}{2} = \frac{ad \times bm}{2}$

Da $\frac{acbd}{2} = abd$

so ist auch $abd = \frac{ad \times bm}{2}$

§. 304.

Die Flächeninhalte zweier Parallelogramme verhalten sich wie die Produkte ihrer Grundlinien und Höhen. Setzt man die Grundlinie des einen $= g$, die des andern $= G$, die Höhen beider $= h$, so verhält sich das erste odet A zum zweiten oder $B = gh : Gh$; also auch $A : B = g : G$; dasselbe wäre der Fall, wenn die beiden Grundlinien $= h$, und die Höhen g und G wären. Parallelogramme verhalten sich also bei gleichen Grundlinien wie die Höhen, und bei gleichen Höhen wie die Grundlinien.

Da Dreiecke die Hälfte von Parallelogrammen sind, so gelten diese Sätze auch von ihnen.

§. 305.

Soll der Flächeninhalt eines Tapezes, Trapezoides (Fig. 25.), oder auch eines Polygons (Fig. 49.) gefunden werden, so zertheile man die Figur durch Diagonalen in Dreiecke, suche den Flächeninhalt aller dieser Dreiecke auf die in §. 303. angegebene Weise, und setze die Summe aller dieser Dreiecke gleich dem Flächeninhalte der gegebenen Figur.

Der Flächeninhalt eines Paralleltrapezes Fig 28. wird gefunden, wenn man die Summe der beiden parallelen Seiten mit ihrem halben Abstande multiplizirt. Also $mbch = (bc + mh) \frac{zk.}{2}$ Denn offenbar ist mbch =

mbh + bhc. Da nun $mbh = \frac{mh \times kz}{2}$ und $bhc = \frac{bc \times kz}{2}$, so ist $mbch = \frac{mh \times kz + bc \times kz}{2} = (bc + mh)\ \frac{kz.}{2}$

Zieht man durch den Mittelpunkt des Perpendikels kz parallel mit mh die Linie eg so ist eg $\times$ kz der Flächeninhalt des Paralleltrapezes. Denn mbch ist = lebcgi + lem + igh. Nun ist lem $\overline{\overline{\backsim}}$ aeb weil ae = le, W. aeb = W. lem, W. mle = W. bac; eben so ist igh $\overline{\overline{\backsim}}$ dgc; folglich ist auch mbch = lebcgi + aeb + dgc; mithin mbch = la di. Da nun ladi = eg $\times$ kz, so ist auch mbch = eg $\times$ kz.

Da $\frac{mbch}{2} = \left(\frac{bc}{2} + \frac{mh}{2}\right)\frac{kz}{2} = (bz + mk)\frac{kz}{2}$ so wird ein Paralleltrapez in zwei gleiche Theile getheilt, wenn man die Mittelpunkte der parallelen Seiten durch eine gerade Linie zusammenzieht.

§. 306.

Errichtet man auf jeder der drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreieckes (Fig. 81) ein Quadrat, so ist das auf der Hypothenuse errichtete Quadrat acde gleich der Summe der beiden auf die Katheten errichteten Quadrate bhic und afkb.

acde = bhic + afkb

Beweis. Man ziehe die geraden Linien ai und be, so entstehen die beiden Dreiecke cai und bce, welche congruent sind, weil zwei Seiten nnd der von ihnen eingeschlossene Winkel in einem Dreiecke genau so sind wie in dem andern. Die Seite ca des Dreieckes cai ist nämlich gleich der Seite ce des Dreieckes bce; denn es sind dieses Seiten eines und desselben Quadrates. Eben so ist die Seite ci des Dreieckes cai gleich der Seite bc des Dreieckes bce;

denn auch sie sind Seiten eines und desselben Quadrates. Ferners ist der Winkel bce gleich dem Winkel aci; denn der Winkel bce ist $= R + u + n$, und der Winkel aci ist auch $= R + u + n$.

Ferner ist das Dreieck cai gleich dem Dreiecke cbi; weil sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, folglich auch die halben Produkte der Grundlinien und Höhen (die Flächeninhalte) gleich seyn müssen. Man kann nämlich für das Dreieck cbi die Seite ci als Grundlinie und die Seite cb als Höhe betrachten. Man kann aber auch für das Dreieck cai die Seite ci als Grundlinie betrachten, und die Höhe dieses Dreieckes wird dann ein Perpendikel auf die verlängerte ci seyn, also ein Perpendikel zwischen denselben Parallelen ci und bh, zwischen welchen cb ein Perpendikel ist. Da nun Perpendikel zwischen Parallelen einander gleich seyn müssen, so wird auch die Höhe von cai gleich seyn der Höhe von cbi. Eben so ist das Dreieck emc gleich dem Dreiecke ebc.

Auch ist emc $= \frac{1}{2}$ gmce, weil das Rechteck gmce durch die Diagonale me in zwei congruente Dreiecke getheilt wird, und folglich eines dieser Dreiecke emc die Hälfte des Rechteckes seyn muß. Aus ähnlichem Grunde ist cbi $= \frac{1}{2}$ bhic.

Alles bisher angeführte läßt sich auch auf die Dreiecke bad und fac u. s. w. anwenden.

1.)
$$\mathrm{cai} \cong \mathrm{bce}$$
$$\mathrm{cai} = \mathrm{cbi}$$

$$\mathrm{bce} = \mathrm{cbi}$$
$$\mathrm{bce} = \mathrm{emc}$$

$$\mathrm{cbi} = \mathrm{emc}$$
$$\mathrm{cbi} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{bhic}$$

$$\mathrm{emc} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{bhic}$$
$$\mathrm{emc} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{gmce}$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{gmce} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{bhic}$$
$$\times 2 = \times 2$$

$$\mathrm{gmce} = \mathrm{bhic}$$

2.)
$$\mathrm{bad} \cong \mathrm{fac}$$
$$\mathrm{bad} = \mathrm{mad}$$

$$\mathrm{fac} = \mathrm{mad}$$
$$\mathrm{fac} = \mathrm{fab}$$

$$\mathrm{mad} = \mathrm{fab}$$
$$\mathrm{mad} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{madg}$$

$$\mathrm{fab} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{madg}$$
$$\mathrm{fab} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{afkb}$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{afkb} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{madg}$$
$$\times 2 = \times 2$$

$$\mathrm{afkb} = \mathrm{madg}$$

$$
\begin{array}{l}
3.)\quad gmce = bhic \\
\underline{madg = afkb} \\
gmce + madg = bhic + afkb \\
\underline{gmce + madg = acde} \\
acde = bhic + afkb.
\end{array}
$$

*Aus diesem Satze erklärt sich auch das (in §. 256. 10.) angegebene Verfahren. Dort wurde nämlich ein Dreieck construirt, wo einer von den Katheten 3, der andere 4 und die Hypothenuse 5mal ein und dasselbe Maß hält. Es ist demnach das Quadrat der Hypothenuse in jenem Dreiecke = 5 X 5 = 25; die Summe der Quadrate der beiden Katheten ist = (3 X 3) + (4 X 4) = 9 + 16 = 25. Mithin ist das Quadrat der Hypothenuse = der Summe der Quadrate der beiden Katheten, und also das Dreieck ein wirklich rechtwinkeliges.

§. 307.

Wenn zwei gerade Linien am, an, (Fig. 55) von welchen die eine, am, in irgend eine Anzahl gleicher Theile, z. B. in u getheilt ist, unter einem beliebigen Winkel a an einander gelegt; wenn ihre Endepunkte durch eine gerade Linie mn verbunden, und wenn durch die Theilungspunkte lauter Parallelen mit mn nach an gezogen werden, so wird auch an dadurch in eben so viele unter sich gleiche Theile getheilt, als am.

*Wie leicht nach dieser Anweisung jede Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden kann, erhellet von selbst.

Beweis. Offenbar fällt zwischen jedes Paar Parallelen die von am nach an gehen, sowohl ein Stück von an als von am, so daß an durch die Parallelen in eben so viele Theile getheilt wird als am.

Um nun zu zeigen, daß diese Theile unter sich gleich sind, ziehe man ez parallel mit am, dann ist ez = bc. (§. 291.) Nun aber ist bc = ab, folglich auch ez = ab. Da nun y = a, o = u, so sind die Dreiecke

abe und ezf congruent, folglich auch ae = ef. Auf die nämliche Art ließe sich nun auch nachweisen, daß fg = ef u. s. f.

Es ist nun $ab = \frac{am}{u}$

$ae = \frac{an}{u}$

folglich $ab : ae = \frac{am}{u} : \frac{an}{u}$

$ab : ae = am : an$

Also auch $\frac{am}{u} : \frac{an}{u} = am : an$

Mithin auch $\frac{ham}{u} : \frac{han}{u} = am : an$

Wenn also am und an in gleich viele etwa in u gleiche Theile getheilt sind, so verhält sich eine bestimmte Menge etwa h dieser gleichen Theile von am zu einer eben so großer Menge gleicher Theile von an, wie sich die ganze Linie am zur ganzen Linie an verhält.

Da zwischen je zwei Parallellinien gleiche Mengen solcher Theile von beiden Linien fallen, so verhalten sich die durch zwei Parallellinien abgeschnittenen Stücke der Linien am und an zu einander, wie die ganzen Linien am und an.

§. 308.

Wenn in einem Dreicke abc (Fig. 79) eine Linie de parallel mit der Grundlinie bc gezogen wird, so verhalten sich sowohl die obern Abschnitte ad und ae als die untern db und ec zu einander, wie die ganzen Seiten ab und ac. Auch verhalten sich die obern Abschnitte ad und ae wie die untern db und ec. Auch verhalten sich die Parallelen, bc : de = ac : ae.

Beweis. Man denke sich die Linie ab in n gleiche Theile getheilt, und nehme an, ein Theilungspunkt falle in d, alsdenn denke man sich durch alle Thei-

lungspunkte von ab Parallelen mit bc nach ac gezogen, so wird auch ac dadurch in n gleiche Theile getheilt, und de wird eine der bemerkten Parallelen seyn. Nun liegen also sowohl über als unter de eben so viele der gleichen Theile von ab, als der gleichen Theile von ac, folglich ad : ae = ab : ac, db : ec = ab : ac.

Nun ist ad : ae = ab : ac
und db : ec = ab : ac

Also ist auch ad : ae = db : ec

Betrachtet man ac als Grundlinie, und zieht df parallel mit ac, so ist ad : cf = ab : cb, und weil cf = de, so ist ad : de = ab : cb. Zieht man durch e eine Parallele mit ab, so findet sich auf ähnliche Art, daß ac : bc = ae : de oder ac : ae = bc : de. Denkt man sich aus a einen Perpendikel ag auf bc gefällt, so verhält sich

ag : au = ab : ad
Da nun bc : de = ab : ad

so ist auch ag : au = bc : de

§. 309.

Geradlinige Figuren sind einander ähnlich, wenn sie 1) gleich viele Seiten haben; 2) wenn die Seiten der einen Figur der Ordnung nach sich so zu einander verhalten wie die der andern; 3) wenn folglich die Winkel der einen der Ordnung nach denen der andern gleich sind.

Jene Seiten ähnlicher Figuren, welche zwischen den gleichen Winkeln liegen, heißen gleichnamige Seiten. In ähnlichen Dreiecken sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleichnamig.

§. 310.

Wenn in einem Dreiecke abc (Fig. 79) eine Linie de parallel mit einer Seite bc gezogen wird, so ist das Dreieck ade dem Dreiecke abc ähnlich.

Beweis. 1) Beide Figuren haben eine gleiche An=

zahl Seiten. 2) Die Winkel der einen sind der Ordnung nach wie die der andern; denn d = b, c = e, a = a. 3) Die Seiten der einen verhalten sich der Ordnung nach zu einander, wie die der andern d. i. ad : de = ab = bc, ae : ed = ac : cb, da : ae = ba : ac.

Da sich nach §. 308 der Perpendikel ag : au = bc de, so verhalten sich die Höhen ähnlicher Dreiecke wie die Grundlinien d. i. ag : au = bc : de. Da nun das Dreieck abc : ade = bc X ag : de X au so ist auch abc X de X au = ade X bc X ag

Daher ist $(abc \times de \times au) : \frac{ag}{au} = (ade \times bc \times ag) : \frac{bc}{de}$

Mithin $\frac{abc \times de \times au \times au}{ag} = \frac{ade \times bc \quad ag \times de}{bc}$

Also $\frac{abc \times de \times au^2}{ag} = ade \times ag \times de$

Oder $abc \times au^2 = ade \times ag^2$

Daher auch $abc : ade = ag^2 : au^2$ (§. 200.)

Aehnliche Dreiecke verhalten sich also, wie die Quadrate ihrer Höhen. Da sich nun die Höhen verhalten, wie die gleichnamigen Seiten, folglich auch die Quadrate der Höhen wie die Quadrate der letzteren, so verhalten sich überhaupt ähnliche Dreiecke wie die Quadrate gleichnamiger Seiten. Da jezwei ähnliche Vielecke in gleich viele Dreiecke getheilt werden können, von denen je zwei einander ähnliche sind, so verhalten sich auch überhaupt ähnliche Figuren wie die Quadrate gleichnamiger Seiten, und dader auch die gleichnamigen Seiten, wie die Quadratwurzeln aus den Flächeninhalten der ähnlichen Figuren.

§. 311.

Dreiecke sind einander ähnlich, wenn alle drei Winkel in dem einen genau so sind, wie in dem andern.

Beweis. Es sey (Fig. 83) g = a, f = c, h = b. Denkt man sich nun das kleinere Dreieck fgh

so auf das Dreieck acb gelegt, daß g auf a und die Seite gf auf die Seite ac zu liegen kommt, so muß auch die Seite gh auf die Seite ab zu liegen kommen, weil g = a. Es muß daher auch f auf irgend einen Punkt m der Linie ac, und h auf irgend einen Punkt x der Linie ab mithin fh wie mx fallen. Da nun b = h also auch = x so muß auch fh oder mx parallel mit bc, folglich das Dreieck max oder fgh dem Dreiecke cab ähnlich seyn (§. 310.)

Dreiecke sind also auch ähnlich, wenn zwei Winkel in dem einen so sind, wie in dem andern.

§. 312.

Dreiecke, in denen ein Winkel gleich ist, und die diese Winkel einschließenden Seiten einerlei Verhältniß haben, sind einander ähnlich.

Beweis. Es sey (Fig. 83) a = g und ac : ab = gf : gh. Man lege das kleinere Dreieck fgh so auf das Dreieck cab, daß g auf a und gf auf ac zu liegen kommt, dann muß auch gh auf ab und f auf einen Punkt m der Linie ac, h auf einen Punkt x von ab zu liegen kommen. Da nun gf : gh oder am ax = ac : ab, so muß mx parallel mit cb (§. 308.) folglich max oder fgh und cab ähnlich seyn. (§. 310.)

§. 313.

Wenn sich die drei Seiten eines Dreieckes der Ordnung nach so zu einander verhalten, wie die des andern, so sind die Dreiecke einander ähnlich.

Beweis. Es sey (Fig. 83) gf : gh = ac : ab, gf : fh = ac : cb woraus von selbst folgt, daß gh : hf = ab : bc. Nun mache man am = gf, und ziehe zu cb die Parallele mx, so ist das Dreieck amx ähnlich dem Dreyecke acb (§. 310.) Nun ist ac : ab = am : ax. Da nun nach der Annahme auch ac : ab = gf : gh, so ist auch am : ax = gf : gh, also am $\times$ gh = ax $\times$ gf, und da gf = am, so ist $\frac{am \times gh}{am} = \frac{ax \times gf}{gf}$; also gh = ax.

Auch ist ac : cb = am : mx. Da nun nach der Annahme auch ac : cb = gf : fh, so ist auch am : mx = gf : fh. Mithin am X fh = mx X gf, und da am = gf so ist auch fh = mx.

Da nun am = gf, ax = gh, mx = fh so sind die Dreiecke gfh und amx congruent, und da amx dem Dreiecke acb ähnlich ist, so ist auch gfh ∽ acb.

§. 314.

Dreiecke sind auch einander ähnlich, wenn zwei Seiten einerlei Verhältniß haben, und der Winkel, welcher der größern von diesen Seiten gegenüberliegt in ihnen gleich ist.

Beweis. Es sey (Fig. 83.) fg : gh = ac : ab, ab > ac, mithin auch gh > gf, endlich f = c. Nun lege man das kleinere Dreieck gfh so auf das Dreieck acb, daß der Punkt f auf den Punkt c, und fg auf ca folglich auf fh auf cb zu liegen kommt, weil f = c Da wird nun g auf einen Punkt y von ac, und h auf einem Punkt z von cb fallen, so daß das Dreieck gfh ≅ ycz. Da nun nach der Annahme fg : gh = ac : ab, so ist auch cy : yz = ac : ab. Ist dieß der Fall, so muß yz parallel mit ab, (§. 308.) folglich ycz ∽ acb. Da nun ycz ≅ gfh, so ist auch acb ∽ gfh. Wenn daher in rechtwinkeligen Dreiecken ein Kathet und die Hypothenuse einerlei Verhältniß haben, so sind die Dreiecke ähnlich.

§. 315.

Wenn in einem rechtwinkeligen Dreiecke (Fig. 87) ein Perpendikel aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällt wird, so entstehen zwei Dreiecke, die unter sich sowohl als dem ganzen Dreiecke ähnlich sind.

Beweis. Es sey bpa = R und pu ein Perpendikel auf ba 1) Nun ist Winkel bup = bpa = R, ferner b = b, also auch bpu = a; mithin in den

Dreiecken bpu und bpa alle Winkel gleich, folglich die Dreiecke ähnlich. (§. 311.)

2) Auch ist Winkel pua = bpa, a = a, also auch upa = b. Also sind auch in den Dreiecken bpa und pua alle Winkel gleich; folglich auch diese Dreiecke ähnlich.

3) Da nun nach Nro. 1. bpu = a nach Nro. 2. upa = b, und pua = pub = R so sind auch in den Dreiecken pua und pub alle Winkel gleich; mithin auch diese Dreiecke einander ähnlich.

Da nun die Dreiecke pua und pub ähnlich sind, so ist bu : up = up : ua, d. i. der Perpendikel, welcher von dem Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkeligen Dreieckes auf die Hypothenuse gefällt wird, ist die mittlere Proportionallinie zwischen den durch ihn gemachten Abschnitten der Hypothenuse.

Weil ferner bpu ∽ bpa, bu : pb = pb : ba, und weil bpa ∽ pua so ist ua : pa = pa : ba; d. i. wenn von dem Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkeligen Dreieckes ein Perpendikel auf die Hypothenuse gefällt wird, so ist jeder Kather die mittlere Proportionallinie zwischen jenem Abschnitte der Hypothenuse, der mit ihm zusammenstößt, und der ganzen Hypothennse.

Da bu : pb = pb : ba
und ua : pa = pa : ba

so ist $pb^2 = bu \times ba$
$pa^2 = ua \times ba$

folglich $pb^2 : pa^2 = (bu \times ba) : (ua \times ba)$
$pb^2 : pa^2 = bu : ua$

Wenn also von dem Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkeligen Dreiecks ein Perpendikel auf die Hypothenuse gefällt wird, so verhalten sich die Quadrate der beiden Katheten, wie die Abschnitte der Hypothenuse, womit sie zusammenstossen.

§. 316.

Hat man zu einem Vielecke abcde ein ihm ähnliches Vieleck zu zeichnen, so zertheile man (Fig. 82) das gegebene Vieleck durch Diagonalen oder auf irgend eine andere Weise in Dreiecke, und ziehe zu allen Seiten des gegebenen Vieleckes Parallelen nach Anweisung der Figur.

*Der Beweis hiefür kann aus der Aehnlichkeit der Dreiecke leicht geführt werden, gleichwie alle von §. 253 an vorgeschriebene Zeichnungsmethoden, welche nicht schon bewiesen wurden, theils aus der Congruenz, theils aus der Aehnlichkeit der Dreiecke bewiesen werden können.

§. 317.

Ein Winkel mcq (Fig. 84), welcher seinen Scheitel im Mittelpunkte eines Kreises hat, wird ein Centri-Winkel genannt.

Der Centri-Winkel hat zu seinem Maße den ganzen Bogen, auf welchem er steht.

Dächte man sich nämlich die ganze Peripherie in ihre 360 Grade getheilt, so müßte man ja auch, um den Winkel mcq zu messen diese Peripherie so an den Winkel mcq bringen, daß der Mittelpunkt der Kreislinie genau auf den Scheitel des Winkels käme, und dann müßte man sehen, wie viele Grade der Peripherie von den beiden Schenkeln des Winkels eingeschlossen werden. Hier hat man also blos den Mittelpunkt der Peripherie nicht mehr an den Scheitel des Winkels zu bringen, weil dieß ohnehin schon geschehen ist.

§. 318.

Der Radius cm (Fig. 84.) läßt sich genau 6mal auf die Peripherie auftragen.

Denn macht man den Centriwinkel mcq genau 60 Grade groß, so wird auch der Bogen mq, den die Sehne mq unterspannt, genau 60 Grade oder den sechsten Theil der Kreislinie betragen. Hält aber

der Winkel mcq genau 60 Grade, so müssen die beiden Winkel cmq und cqm des Dreieckes mcq mit einander 120 Grade halten. Da endlich in diesem Dreiecke die beiden Winkel cmq und cqm einander gleich sind, weil die beiden ihnen gegenüberliegenden Schenkel, als Radien eines und desselben Kreises, einander gleich seyn müssen, so hält auch jeder von diesen beiden Winkeln, mithin jeder der drei Winkel des Dreieckes, genau 60 Grade. Da aber dieses nur im gleichseitigen Dreiecke der Fall ist, so muß das Dreieck, mcq ein gleichseitiges Dreieck, und folglich mq = cm seyn. Da aber mq den sechsten Theil der Peripherie unterspannt, so muß sich mq mithin auch cm oder der Radius auch 6mal auf der Peripherie herumtragen lassen.

§. 319.

Parallelen (Fig. 85.) schneiden von einem und demselben Kreise gleiche Bögen ab. Wenn oq parallel mit mz ist, so ist auch om = qz.

Beweis. Errichtet man das Dreieck mcz und fällt von der Spitze c dieses Dreieckes auf die Grundlinie mz einen Perpendikel, so wird dadurch das Dreieck mcz in zwei congruente Dreiecke mcy und zcy getheilt, und es ist folglich der Winkel mcy gleich dem Winkel zcy, mithin der Bogen mp auf welchem der Centriwinkel mcy steht, gleich dem Bogen zp, auf welchem der Centriwinkel zcy steht; denn gleiche Winkel müssen gleiche Maße haben.

Also mp = zp.

Errichtet man das Dreieck ocq, so ist die Linie cx ein Perpendikel auf die Grundlinie oq dieses Dreieckes. Denn wenn mz und oq parallel sind, so muß der Winkel y gleich dem Winkel x seyn, weil dieß der äußere und innere Winkel auf Einer Seite der schneidenden Linie ist. Da nun y = R, so muß auch x = R, und folglich cx ein Perpendikel auf oq seyn. Ist aber cx ein Perpendikel auf oq, so ist das Dreyeck ocx congruent mit dem Dreiecke qcx, und folglich Winkel ocx gleich Winkel qcx. Es muß also

auch der Bogen op als das Maß des Centriwinkels ocx, gleich seyn dem Bogen qp, als dem Maße des gleichgroßeu Centriwinkels qcx.

Also $op = qp$

Nun ist $mp = zp$

$op = qp$

Daher $mp - op = zp - qp$

$zq = zp - qp$

$mp - op = zq$

$mp - op = mo$

$mo = zq$

§. 320.

Da man (Fig. 85.) auf jede Sehne oq ein gleichschenkeliges Dreieck errichten kann, indem man die Endepunkte o und q der Sehne mit dem Mittelpunkte des Kreises znsammenzieht, da ferner ein solches Dreieck seine Spitze im Mittelpunkte c des Kreises hat, so muß ein Perpendikel, welcher vom Mittelpunkte des Kreises (von der Spitze eines solchen Dreieckes) auf eine Sehne (die Grundlinie eines solchen Dreieckes) gefällt wird, immer den Mittelpunkt der Sehne treffen (die Grundlinie des gleichschenkeligen Dreieckes in zwei gleiche Theile zertheilen).

Errichtet man auf dem Mittelpunkte einer Sehne einen Perpendikel, so muß dieser, nach innen verlängert, den Mittelpunkt des Kreises treffen.

Man findet daher den Mittelpunkt eines Kreises, oder auch eines großen Bogens, wenn man auf die Mittelpunkte zweyer fast rechtwinkelig gegen einander stehender, wenigstens nicht paralleler, Sehnen Perpendikel errichtet, und diese bis zu dem Punkte, in welchem sie sich schneiden, verlängert.

§. 321.

Soll man (Fig. 87.) durch drei gegebene

Punkte m, d und q eine Kreislinie beschreiben, so reisse man aus d, als dem mittleren dieser Punkte einen Bogen, und mit derselben Zirkelöffnung reisse man auch ans m und q zwei Bögen, welche den ersteren in x und y, n und z schneiden. Nun ziehe man die geraden Linien xy und nz, und verlängere selbe nach innen, bis sie sich in c schneiden. Endlich reisse man aus c mit der Zirkelöffnung cm die verlangte Kreislinie.

Man dachte sich nämlich, durch diese drey Punkte schon eine Kreislinie gezogen, dachte sich auch die Sehnen md uud dq gezogen, errichtete Perpendikel auf die Mittelpunkte dieser Sehnen, und verlängerte sie nach innen, bis sie sich einander schnitten.

Sollten also die Getriebe*) A, B und C an den bezeichneten Stellen m, d und q von einem und demselben Rade ergriffen werden, so könnte man auf obige Weise den Mittelpunkt und die erforderliche Größe dieses Rades finden.

Eben so müßte man den Bogen zu einem Gewölbe vorzeichnen, wenn mq als die Entfernung der beiden Widerlager nnd d als der höchste Punkt des Bogens gegeben wäre.

§. 322.

Ein Winkel amq (Fig. 86.), welcher seinen Scheitel in einem Punkte m der Peripherie hat, wird ein **Peripherie-Winkel** genannt.

Der Peripherie-Winkel hat zu seinem Maße den halben Bogen, auf welchem er steht, ist also gleich dem halbeu Centriwinkel, der mit ihm auf gleichem Bogen steht.

$$amq = \frac{aq}{2}$$

Bew. $x = a + y = 2y$

$$z = q + g = 2g$$

*) Ein Getriebe ist ein mit Zähnen versehenes Rad, welches in Beziehung auf ein anderes, unmittelbar damit verbundenes Rad sehr klein ist.

$$x + z = 2y + 2g$$
$$\underline{x + z = acq}$$
$$acq = 2y + 2g$$
$$\underline{acq = aq}$$
$$aq = 2y + 2g$$

$$\frac{aq}{2} = y + g$$

$$\underline{amq = y + g}$$
$$amq = \frac{aq}{2}$$

Wenn also zwei Sehnen in was immer für einem Punkte der Peripherie so zusammenstossen, daß ihre beiden andern Endepunkte die Endepunkte eines und desselben Diameters treffen, so bilden sie einen rechten Winkel.

*Aus diesem suche man das §. 256. 8 angegebene Verfahren herzuleiten.

**Mit Hilfe dieses Satzes findet man (Fig 87) zu zwei gegebenen Linien ab und au die mittlere Proportionallinie, wenn man aus dem Mittelpunkte von ab eine Kreislinie reißt, au auf ab trägt, wodurch auf letzterer der Punkt u bestimmt wird, nun den Perpendikel up errichtet und dann pa zieht, welches die verlangte mittlere Proportionallinie; ist also au : pa = pa : ab (§. 315.)

§. 323.

Der Diameter eines jeden Kreises verhält sich zu seiner Peripherie wie 1 zu 3,141592 . . .

Also D : P = 1 : 3,141592.

*Man begnügt sich meistens mit zwei Dezimalen, obwohl man 156 hat, und nennt die Zahl selbst, die gewöhnlich durch π bezeichnet wird, von ihrem Finder Ludolph van Ceulen die Ludolphische Zahl.

Ist also der Diameter eines Kreises bekannt, so kann die Peripherie desselben sehr leicht gefunden werden; umgekehrt kann auch der Diameter sehr leicht gefunden werden, wenn man die Peripherie oder auch nur einen Grad der Peripherie kennt.

Die Peripherien verhalten sich zu einander wie die Diameter also auch wie die Radien und umgekehrt, d. i. ein 4mal größerer Diameter hat eine 4mal größere Peripherie. Soll sich daher (Fig. 87.) das Getriebe A 3mal um seine Axe drehen bis sich das große Rad Einmal um die seinige dreht, so muß die Peripherie des Getriebes also auch die Anzahl seiner Zähne in der des Rades dreimal enthalten, mithin der Diameter des Getriebes 3mal kleiner seyn als der des Rades.

§. 324.

Der Flächeninhalt eines Kreises ist = $\frac{PD}{4}$ oder = $\frac{\pi D^2}{4}$ also auch = πR^2 wenn P die Peripherie, R den Radius, D den Diameter und π die Ludolphische Zahl bezeichnet.

Bew.*) Man denke sich den Kreis in unendlich viele Dreiecke getheilt, die ihre Spitzen sämmtlich im Mittelpunkte des Kreises haben, und deren unendlich kleine Grundlinien unendlich kleine Theile der Peripherie sind. Es wird demnach jedes dieser Dreiecke

*) Auf ähnliche Art wird der Beweis für den Kreisausschnitt geführt.

ein gleichschenkeliges Dreieck seyn, dessen Schenkel Radien des Kreises, und dessen Höhe bei der unendlich kleinen Grundlinie der Radius des Kreises selbst ist. Heißt man nun eine solche unendlich kleine Grundlinie g, und die Anzahl aller Dreiecke n, so ist der Flächeninhalt seines Dreieckes

$$= \frac{gR}{2}$$

und der Flächeninhalt von allen oder von n Dreiecken

$$\text{ist} = \frac{n \times gR}{2} = \frac{ng \times R}{2}$$

Nun ist aber ng = der Summe aller dieser Grundlinien oder = der Peripherie = P. Es ist also

$$\frac{ng \times R}{2} = \frac{PR}{2}$$

folglich der Flächeninhalt des Kreises

$$= \frac{RP}{2} = \frac{2RP}{4} = \frac{DP}{4}$$

Da die Peripherie gleich πD ist, wenn man die ludolphische Zahl = π setzt, so kann man statt

$$\frac{DP}{4} \text{ auch } \frac{D \times \pi D}{4} = \frac{\pi D^2}{4}$$

setzen, woraus zugleich erweislich ist, daß sich Kreisflächen zu einander verhalten, wie die Quadrate ihrer Diameter.

§. 325.

Aufgabe. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Diameter 54,5′ hält?

Auflösung.

$$K = \frac{3{,}14 \times (54{,}5)^2}{4} = \frac{3{,}14 \times 2970{,}25}{4}$$

$$= \frac{9326{,}585}{4} = 2331{,}6462$$

Der Kreis hält folglich 2331,6462 Q. Fuß.

§. 326.

Aufgabe. Wie groß muß der Radius eines Kreises von 500 Q. Fuß seyn?

Auflösung.

$$\frac{3{,}14 D^2}{4} = 500$$

$$3{,}14\ D^2 = 2000$$

$$D^2 = 636{,}94$$

$$D = \sqrt{636{,}94} = 25{,}23$$

$$R = \quad 12{,}615$$

Der Radius eines Kreises von 500 Q. Fuß ist also = 12,615′.

§. 327.

Ein Theil der Kreisfläche, welcher (Fig. 84.) von zwei Radien cm und cq und einem Bogen mq begränzt wird, heißt ein Kreisausschnitt, Sector.

Der Flächeninhalt eines Kreis-Ausschnittes wird gefunden, wenn man den Bogen mit dem Radius multiplizirt, und das Produkt durch 2 dividirt.

§. 328.

Aufgabe. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes, dessen Centriwinkel = 50° und dessen Radius = 25′?

Auflösung. Man berechne vor allem die Peripherie, was sehr leicht geschehen kann, da bekannt ist, daß der Diameter = 50′.

$$50 : P = 1 : 3{,}14$$

$$P = 157{,}00$$

Nun suche man durch eine Proportion die Größe des Bogens von 50°.

$$50 : 360 = x : 157$$

$$36x = 785$$

$$x = \frac{785}{36}$$

$$x = 21{,}8$$

Der Bogen hält also 21,8′.

Nun multiplizire man den Bogen mit dem Radius, und dividire das Produkt durch 2, so ist

10,9

$$\text{Sector} = \frac{21{,}8 \times 25}{2} = 272{,}5$$

Der Kreisausschnitt hält also 272,5 Q. Fuß.

§. 329.

Ein Theil der Kreisfläche, welcher (Fig. 84.) von einem Bogen mq, und der unter letzteren gespannten Sehne mq begränzt wird, heißt ein Kreisabschnitt, Segmentum.

Der Flächeninhalt eines Kreisabschnittes wird gefunden, wenn man den auf gleichem Bogen stehenden Kreisausschnitt berechnet, und von diesem das darüber stehende Dreieck subtrahirt.

§. 330.

Aufgabe. Wie groß ist der Flächeninhalt des von dem Bogen und der Sehne mq (Fig. 84.) eingeschlossenen Kreisabschnittes, wenn der Radius = 50′ und der dazu gehörige Centriwinkel = 60°?

Auflösung. Man berechne vor allem den Kreis-Ausschnitt, der mit dem gegebenen Kreisabschnitte auf gleichem Bogen steht.

$$100 : P = 1 : 3{,}14$$

$$P = 314$$

$$60 : 360 = x : 314$$

$$1 : 6 = x : 314$$

$$6x = 314$$

$$x = 52.3$$

$$\text{Sector} = \frac{52.3 \times \overset{25}{\cancel{50}}}{\cancel{2}} = 1307{,}5$$

Der Flächeninhalt des Kreisausschnittes beträgt also 1307,5 Q. Fuß.

Da nun das Dreieck mcq ein gleichseitiges Dreieck ist, so wird dieses durch seine eigene Höhe cu in zwei congruente und dabei rechtwinkelige Dreiecke getheilt. Da hält nun in dem Dreiecke ucq die Seite cq genau 50′, die Seite uq genau 25′. Es kann also cu leicht durch Rechnung gefundeu werden. Nimmt man an, daß cu genau x Fuß halte, so

$$x^2 + 25^2 = 50^2$$
$$x^2 + 625 = 2500$$
$$x^2 = 1875$$
$$x = \sqrt{1875} = 43{,}3$$

Da nun cu fast 43,3′ hält, und zugleich die Höhe des Dreieckes mcq ist, so kann der Flächeninhalt des Dreieckes mcq sehr leicht gefunden werden.

$$mcq = \frac{\overset{25}{\cancel{50}} \times 43{,}3}{\cancel{2}} = 1082{,}5$$

Das Dreieck mcq hält also 1082,5 Q. Fuß.

Sector = 1307,5 Q. Fuß.
Drei ck = 1082,5 Q. Fuß.

(Sector—Dreieck) Segmentum = 225 Q. Fuß.

§. 331.

Eine Fläche, welche von zwei concentrischen Kreisen eingeschlossen wird, nennt man einen **Kreisring**.

Der Flächeninhalt eines Kreisringes wird gefunden, wenn man den Flächeninhalt des kleineren Kreises vom Flächeninhalte des größeren Kreises subtrahirt.

§. 332.

Aufgabe. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisringes, wenn der Diameter des größeren Kreises = 60′ und der des kleineren Kreises = 50′ ist.

Auflösung. Man berechne zuerst den Flächeninhalt des größeren Kreises.

$$60 : P = 1 : 3{,}14$$
$$P = 188{,}4$$

$$K = \frac{\overset{15}{\cancel{60}} \times 188{,}4}{\cancel{4}} = 2826$$

Nun berechne man den Flächeninhalt des kleineren Kreises.

$$50 : P = 1 : 3{,}14$$
$$P = 157$$

$$K = \frac{\overset{25}{\cancel{50}} \times 157}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{3925}{2} = 1962{,}5$$

Kreisring = 2826 — 1962,5 = 863,5

Der Flächeninhalt des Kreisringes beträgt also 863,5 Q. Fuß.

§. 333.

Der Flächeninhalt eines Stückes der Kreisfläche wird gefunden, wenn man zuerst den Flächeninhalt des ganzen Kreises berechnet, und von diesem die fehlenden Stücke subtrahirt, es mögen nun die letzteren Kreise, Dreiecke, Kreisabschnitte u. s. w. seyn.

§. 334.

Ein Vieleck (Fig. 84.), welches so in einem Kreise construirt ist, daß alle Seiten des ersteren weiter nichts sind als gleiche Sehnen des letzteren, wird ein reguläres Polygon genannt.

Der Mittelpunkt des Kreises ist daher auch der Mittelpunkt des regulären Polygons.

Die Winkel, welche je zwei solcher Sehnen zusammen bilden, heißt man Polygons- oder Vielecks-Winkel.

Zieht man von den Scheiteln der Polygonswinkel gerade Linien nach dem Mittelpunkte des Polygons, so nennt man die dadurch um den Mittelpunkt entstehenden Winkel Zentralwinkel.

Die Anzahl der Zentralwinkel eines Polygons ist gleich der Anzahl der Seiten des Polygons, und das Polygon wird durch die Schenkel der Zentralwinkel in eben so viele gleichschenkelige und unter sich congruente Dreiecke getheilt, als das Polygon Seiten hat.

Alle Zentralwinkel sind einander gleich; eben so alle Polygonswinkel.

Sucht man den Flächeninhalt eines dieser Dreiecke und multiplizirt ihn mit der Anzahl der Seiten, so ist der Flächeninhalt des Polygons gefnnden.

Errichtet man auf die Mittelpunkte zweier nicht paralleler Seiten eines regulären Polygons Perpendikel, und verlängertdiese nach innen, bis sie sich einander schneiden, so ist ihr Durchschnittspunkt der Mittelpunkt des Polygons (§. 318.)

§. 335.

Der Zentralwinkel eines regulären Polygons ist $= \frac{360}{n}$, wenn n die Anzahl der Seiten des Polygons bedeutet.

Bew. Da alle durch die Schenkel der Zentralwinkel gebildete Dreiecke congruente Dreiecke sind, so müssen die Winkel an den Scheiteln dieser Dreiecke, oder die Zentralwinkel alle einander gleich seyn. Da sie nun (§. 257.) alle zusammen 360 Grade halten so muß Einer von n gleichen Winkeln auch $\frac{360}{n}$ Grade halten.

§. 336.

Der Polygonswinkel bdx (Fig. 84.) hält $180 - \frac{360}{n}$ Grade.

Bew. Da der Winkel bcd $= \frac{360}{n}$ Grade hält, so halten die beiden Winkel cbd und bdc mit einander $180 - \frac{360}{n}$. Da man nun in dem Ausdrucke $cbd + bdc = 180 - \frac{360}{n}$ statt cbd den ihm gleichen Winkel cdx setzen kann, so erhält man $cdx + bdc = 180 - \frac{360}{n}$

Da nun $cdx + bdc$ offenbar $= bdx$, so erhält man $bdx = 180 - \frac{360}{n}$

Es ist also der Polygonswinkel in einem regulären Fünfecke $= 180 - \frac{360}{5} = 180 - 72 = 108$ Grade.

Uebrigens weiß man auch (§. 292.) daß alle Winkel eines jeden Polygons $= 180 \times n - 2$, also beim Fünfecke $180 \times 3 = 540$ Grade halten. Da nun in einem regulären Vielecke alle Winkel einander gleich sind, so muß einer $\frac{540}{5} = 108$ Grade halten.

§. 337.

Hat man auf eine gegebene gerade Linie am (Fig. 88.) ein reguläres Fünfeck zu errichten, so verlängere man am über m hinaus bis d, so daß md = am wird. Nun errichte man auf m einen Perpendikel, und reisse aus m mit der Zirkelöffnung ma einen Bogen, welcher den eben genannten Perpendikel in x berührt. Hierauf theile man am in q in zwei gleiche Theile, und reisse aus q mit der Zirkelöffnung qx einen Bogen, welcher md in y schneidet. Reißt man nun mit der Zirkelöffnung

ay aus a und m zwei Bögen, welche sich in n schneiden, so ist n die Spitze des regulären Fünfeckes. Nun reisse man aus a und n mit der Zirkelöffnung am zwei Bögen, welche sich in g schneiden, und eben so mit derselben Zirkelöffnung aus m und n zwei Bögen, welche sich in f schneiden, und ziehe endlich die geraden Linien ag, gn, nf und fm.

§. 338.

Soll auf eine gerade Linie ab (Fig. 89.) ein reguläres Sechseck errichtet werden, so reisse man aus a und b mit der Zirkelöffnung ab zwei Bögen, welche sich in c schneiden. Aus c reisse man mit derselben Zirkelöffnung eine Kreislinie, so wird diese durch die beiden Punkte a und b gehen, und man wird ab sechsmal auf der Kreislinie auftragen können, wodurch die Punkte d, e, f, g bestimmt werden. Nun ziehe man je zwei solcher Punkte durch gerade Linien zusammen.

§. 339.

Hat man auf einer gegebenen geraden Linie ab (Fig. 90.) ein reguläres Siebeneck zu errichten, so verlängere man ab über b hinaus bis k, so daß bk gleich ab wird. Nun reisse man aus a und k mit der Zirkelöffnung ak unterhalb ak zwei Bögen, welche sich in m schneiden; eben so reisse man aus m und k mit derselben Zirkelöffnung zwei Bögen, welche sich in p schneiden. Zieht man hierauf die beiden geraden Linien ap und bm, so werden sich diese in x schneiden. Endlich reisse man aus a und b mit der Zirkelöffnung ax über ab zwei Bögen, welche sich in c schneiden, und reisse aus c mit derselben Zirkelöffnung eine Kreislinie, die nun durch die Punkte a und b gehen wird, und auf der die Linie ab siebenmal herumgetragen, also das reguläre Siebeneck errichtet werden kann.

§. 340.

Soll auf einer gegebenen geraden Linie ab (Fig. 91.) ein reguläres Achteck errichtet werden, so errichte man auf dem Mittelpunkt von ab einen Perpendikel (nach §. 256. 4.), wodurch der Punkt m bestimmt wird. Aus m reisse man mit der Zirkelweite ma einen Bogen, welcher den Perpendikel in d schneidet, und aus d reisse man mit der Zirkelöffnung db einen Bogen, welcher den Perpendikel in c schneidet. Nun reisse man aus c mit der Zirkelöffnung ca eine Kreislinie, auf welche ab achtmal wird herumgetragen werden können, wodurch die Punkte x, y, r, p, q und o bestimmt werden, von denen je zwei durch gerade Linien zusammen zu ziehen sind.

§. 341.

Hat man auf eine gegebene gerade Linie ab (Fig. 92.) ein reguläres Neuneck zu errichten, so errrichte man vor Allem auf den Mittelpunkt von ab einen Perpendikel (nach §. 256. 4.) Nun reisse man aus a mit der Zirkelöffnung ab einen Bogen, welcher den Perpendikel in x schneidet, und aus x mit der Zirkelöffnung yb einen Bogen, welcher den Perpendikel in c schneidet. Reißt man nun aus c mit der Zirkelöffnung cb eine Kreislinie, so wird diese durch die beiden Punkte a und b gehen, und ab wird in derselben neunmal herumgetragen werden können, wodurch die Punkte d, e, f, g, h, i, k bestimmt werden, von denen je zwei durch gerade Linien zu verbinden sind.

§. 342.

Hat man auf eine gegebene gerade Linie ab (Fig. 93.) ein reguläres Zehneck zu errichten, so verlängere man ab über b hinaus bis d, so daß bd = ab wird. Nun errichte man auf dem Punkt b einen Perpendikel, und reisse aus b mit der

Zirkelöffnung ba einen Bogen, welcher den Perpendikel in e schneidet. Nun theile man ab in x in zwei gleiche Theile, und reisse aus x mit der Zirkelöffnung xe einen Bogen, welcher bd in y schneidet. Reißt man nun aus a und b mit der Zirkelöffnung ay oberhalb ab zwei Bögen, welche sich in c schneiden, so ist aus c mit derselben Zirkelöffnung eine Kreislinie zu beschreiben, in welche ab zehnmal wird herumgetragen werden können, wodurch die Punkte f, g, h, i, k, l, m, n bestimmt werden, wovon man je zwei durch gerade Linien zu verbinden hat.

*Alle diese reguläre Polygone können auch construirt werden, wenn man den Polygonswinkel berechnet (§. 336.), und an die gegebene Seite zwei gleich große unter dem gehörigen Winkel ansetzt u. s. f.

Ueber verschiedene krumme Linien und die dadurch begränzten Flächen.

§. 343.

Eine Spirallinie ist eine krumme Linie, welche so um einen Punkt herumläuft, daß sie sich in stets gleichem Verhältnisse immer mehr und mehr von diesem Punkte entfernt.

Soll nun eine solche Spirallinie aus lauter halben Zirkelstücken construirt werden, so ziehe man (Fig. 94.) eine gerade Linie ab, und reisse aus einem beliebigen Punkte d derselben mit beliebiger Zirkelöffnung einen Halbkreis cfe. Nun reisse man aus c mit der Zirkelöffnung ce den Halbkreis egh. Dann reisse man wieder aus d mit der Zirkelöffnung dh den Halbkreis hik, und fahre so fort, bald aus c unterhalb, bald aus d oberhalb der geraden Linie ab in der Art einen Halbkreis zu reissen, daß alle diese Halbkreise eine fortlaufende krumme Linie bilden.

§. 344.

Hat man eine längliche Spirallinie zu construiren, so ziehe man (Fig. 95.) eine gerade Linie. Auf dieser nehme man zwei mehr

oder minder weit von einander entfernte Punkte f und e an, und reisse aus ihnen mit der Zirkelöffnung fe unter- und oberhalb fe zwei Bögen, welche sich in c und d kreuzen. Nun ziehe man die geraden Linien ce und cf, de und df, und verlängere alle über e und f hinaus, bis zu einem unbestimmten Punkte. Nun errichte man auf e einen kleinen Perpendikel eb, und lasse von f einen eben so großen Perpendikel fg fallen; ferner ziehe man von c und d kleine Parallelen zu fe von der Größe wie eb, und zwar die eine nach der Rechten, die andere nach der Linken. Endlich reisse man aus k einen Bogen von e bis an die verlängerte Linie df, diesen Bogen setze man aus g fort bis an die verlängerte cf, aus i bis an ce, aus b bis an de, aus k bis an df u. s. w.

§. 345.

Soll eine immer weiter und weiter auseinander laufende Schneckenlinie gerissen werden, so ziehe man (Fig. 96.) eine gerade Linie nl. Von einem ungefähr in der Mitte gelegenen Punkte a aus trage man 3 kleine aber gleiche Theile a2, 24, 46 über a auf die Linie an, und drei gleich große Theile a1, 13, 35 unter a auf al. Nun reisse man aus a mit der Zirkelöffnung a5 den Bogen 56, diesen setze man aus 1 mit der Zirkelöffnung 16 fort bis an die Linie nl, dann setze man ihn aus 2 abermals fort bis an die Linie nl, dann aus 3, 4, 5, 6 u. s. w.

*Je kleiner die von a aus auf al getragenen 6 Theile sind, desto weniger merklich wird das Auseinanderlaufen der Schneckenlinie seyn.

**Hierher gehören auch die Schlangenlinien, welche aus lauter halben Zirkelstücken bestehen wie Fig. 2.; ferner die Schraubenlinie, die man am deutlichsten erhält, wenn man einen Faden um ein rundes Stäbchen windet, wodurch Schraubengänge entstehen.

§. 346.

Hat man eine Linsenlinie (zusammengedrückte Kreislinie) zu zeichnen, deren längerer Durchmesser ab gegeben ist, so theile man ab (Fig. 97.) in drei gleiche Theile ac, cd und db. Aus c und d reisse

man mit der Zirkelöffnung ca zwei Kreislinien, welche sich in e und f schneiden. In diesen Kreislinien ziehe man die Diameter eci, edk, fch, fdg. Nun reisse man aus f und e mit der Zirkelöffnung fh die Bögen hg und ik, welche mit den beiden Bögen iah und gbk die Linsenlinie darstellen werden.

§. 347.

Hat man eine mehr längliche Linsenlinie zu zeichnen, deren längerer Durchmesser yz gegeben ist, so theile man yz (Fig. 98.) in vier gleiche Theile ya, as, sc und cz. Aus a, s und c reisse man mit dem Radius ay drei Kreislinien, und ziehe noch überdieß mn rechtwinkelig durch s, wodurch die Punkte b und o bestimmt werden. Nun ziehe man bap und bcg, oad und och. Endlich reisse man aus b und o mit der Zirkelöffnung bp die Bögen pg und dh, so werden letztere mit den Bögen pyd und hzg die verlangte Linsenlinie darstellen.

§. 348.

Hat man eine Ellipse von einer vorgeschriebenen Länge lk und Breite gp zu beschreiben, so lasse man sich vor Allem die beiden Axen lk und gp rechtwinkelig in a so durchschneiden, daß a der Mittelpunkt von lk und von gp ist. Reißt man nun aus p mit der Zirkelöffnung al einen Bogen, welcher lk in h und i schneidet, so nennt man h und i die beiden Brennpunkte der Ellipse. In letzteren befestige man ein Paar Stifte oder Pfähle, und binde an diese eine Schnur, welche so lange als lk ist. Setzt man nun in diese Schnur einen Stift e ein, und fährt mit diesem auf einer Fläche so herum, daß he und ie immer gleichgespannt bleiben, so wird der Stift die Zeichnung der verlangten Ellipse zurücklassen.

§. 349.

Hat man eine Eilinie (ein Oval) zu zeichnen, deren kleinerer Durchmesser ab gegeben ist, so ziehe man (Fig. 100.) vor Allem durch den Mittelpunkt h von ab perpendikulär eine

gerade Linie cd. Nun reisse man aus h mit der Zirkelöffnung ha eine Kreislinie, so wird diese cd in e schneiden. Hierauf ziehe man die Linien ae und be, und verlängere sie unbestimmt über e hinaus. Nun reisse man aus a und b mit der Zirkelöffnung ab die Bögen bk und ai, ferner aus e den Bogen ik, so werden diese drei Bögen mit dem Bogen acb die verlangte Eilinie darstellen.

§. 350.

Hat man ein mehr längliches Oval zu zeichnen, so ziehe man (Fig. 101.) eine gerade Linie oz. Aus einem beliebigen Punkte a derselben reisse man mit einem Radius, der etwas kleiner ist als der dritte Theil des größern Durchmessers des Ovals, eine Kreislinie, so wird dadurch an der geraden Linie der Punkt b bestimmt. Aus b reisse man mit demselben Radius einen zweiten Kreis, der den ersten in c und d schneidet. Nun ziehe man die Diameter cbi und dbh, cag und daf. Dann reisse man aus c und d mit der Zirkelöffnung ci die Bögen gp und ft, welche sich in y schneiden. Endlich theile man by in zwei gleiche Theile, wodurch der Punkt k bestimmt wird, und ziehe die geraden Linien ckm und dkr. Nun reisse man aus k den Bogen mr, welcher mit den Bögen fg, gm und fr das verlangte Oval schließt.

§. 351.

Hat man eine Kettenlinie zu ziehen, so ziehe man (Fig. 102.) eine physisch horizontale Linie ab und aus der Mitte c der letzteren lasse man einen physischen Perpendikel herab. Nun bestimme man die Weite ab und die Höhe cd. Bindet man nun an zwei in a und b eingeschlagene Stifte eine recht wenig steife (am besten eine seidene) Schnur fest, und windet sie an diese Stifte so lange auf, bis sie gerade bis zu d herabhängt, so darf man nur nach dieser Schnur auf eine dahinter stehende Fläche eine krumme Linie reissen, welche die verlangte Kettenlinie ist, und für die dauerhafteste zu Gewölben gehalten wird.

*Die Zeichnung der verschiedenen Bögen zu Gewölben wurde, als der Baukunst angehörend, übergangen.

§. 352.

Aufgabe. Wie groß ist die Peripherie einer Linsenlinie wie Fig. 97., wenn der größere Durchmesser ab derselben 75′ beträgt? Wie groß ist die von dieser krummen Linie begränzte Fläche?

Auflösung. I.

Setzt man den größern Durchmesser ab $= x$ und die Ludolphische Zahl $= \pi$, so ist die Peripherie oder $P = \frac{8\pi x}{9}$, oder wenn man die ludolphische Zahl $=$ 3,141 setzt, $P = 2{,}792\ x$. Es ist also im obigen Beispiele $P = 2{,}792 \times 75 = 209{,}4$ Fuß.

Denn da $ac = cd = db$, so ist jede dieser Linien gleich dem dritten Theile von $ab = \frac{x}{3}$. Nun berechne man die Peripherie eines mit dem Radius $\frac{x}{3}$ gerissenen Kreises.

$$\frac{2x}{3} : p = 1 : \pi$$

$$p = \frac{2x\pi}{3}$$

Nun berechne man den Bogen ih.

Da die Dreiecke ced und cfd gleichseitige Dreiecke sind, so hält jeder der Winkel ecd und dcf genau 60°. Es hält also auch jeder der Winkel hca und ica genau 60°; mithin der Centriwinkel hci genau 120°; folglich auch der Bogen ih als das Maß dieses Winkels genau 120 Grade, macht folglich den dritten Theil der ganzen Peripherie oder

$$\frac{2x\pi}{3} : 3 = \frac{2x\pi}{9}$$

Der Bogen gk, als dem Bogen ih vollkommen gleich, hält also auch $\frac{2x\pi}{9}$

Nun berechne man den Bogen hg.

Da der Winkel hfg genau 60° hält, und für hg ein Centriwinkel ist, so hält auch hg genau 60°; auch ist der Radius von hg offenbar $= \frac{2x}{3}$

Man berechne nun die ganze Peripherie, und nehme davon den sechsten Theil, weil ein Bogen von 60° der sechste Theil der Peripherie ist. Da der Diameter für diese Peripherie noch einmal so groß ist als der Diameter der oben berechneten, so muß auch diese Peripherie noch einmal so groß seyn als die obige, folglich $= \frac{4x\pi}{3}$

Der Bogen hg ist also $= \frac{4x\pi}{3} : 6 = \frac{4x\pi}{18} = \frac{2x\pi}{9}$

Der Bogen ik, als vollkommen gleich mit hg, hält also auch $\frac{2x\pi}{9}$

Also ist die Peripherie der Linsenlinie oder P = ih + gk + hg + ik $= \frac{2x\pi}{9} + \frac{2x\pi}{9} + \frac{2x\pi}{9} + \frac{2x\pi}{9} = \frac{8x\pi}{9}$

Nimmt man nun bei der Ludolphischen Zahl 3 Dezimalen an, so ist $P = \frac{8\pi x}{9} = \frac{8 \times 3{,}141 x}{9} = \frac{25{,}128\, x}{9}$ $= 2{,}792\, x$

II.

Die Fläche ist $= 0{,}6017\, x^2$, wenn x den größern Durchmesser ab bezeichnet.

Es ist also im gegebenen Beispiele die Fläche $= 0{,}6017 \times 75^2 = 3384{,}5625$ Q. Fuß.

Denn die Fläche besteht aus den beiden einander gleichen Kreisausschnitten hci und gdk, aus dem Kreisausschnitte hfg, und aus dem Kreisausschnitte iek weniger der Raute cedf.

Da der Bogen ih $= \frac{2x\pi}{9}$, und der Radius ac

desselben $= \frac{x}{3}$ ist, so ist der Kreisausschnitt hei

$$= \left(\frac{2x\pi}{9} \times \frac{x}{3}\right) : 2 = \frac{2\pi x^2}{27} : 2 = \frac{\pi x^2}{27};$$

also ist auch der Kreisausschnitt gdk $= \frac{\pi x^2}{27}$

Da der Bogen hg $= \frac{2x\pi}{9}$ und der Radius fh desselben $= \frac{2x}{3}$ ist, so ist der Kreisausschnitt hfg

$$= \left(\frac{2x\pi}{9} \times \frac{2x}{3}\right) : 2 = \frac{4\pi x^2}{27} : 2 = \frac{2\pi x^2}{27}$$

also noch einmal so groß als der Kreisausschnitt hei. Es ist also auch der Kreisausschnitt iek $= \frac{2\pi x^2}{27}$

Als Grundlinie der Raute cedf kann man fd, als ihre Höhe cm, das wir durch h bezeichnen, betrachten.

Da ist nun: $h^2 + \left(\frac{x}{6}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2$

$$h^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{6}\right)^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36} = \frac{4x^2 - x^2}{36} = \frac{3x^2}{36} = \frac{x^2}{12}$$

$$h = \frac{x}{\sqrt{12}} = \frac{x}{3{,}464}$$

Mithin ist die Raute cedf $= \frac{x}{3} \times \frac{x}{3{,}464} = \frac{x^2}{10{,}392}$

Also ist die ganze von der Linsenlinie begränzte Fläche:

$$= \frac{\pi x^2}{27} + \frac{\pi x^2}{27} + \frac{2\pi x^2}{27} + \frac{2\pi x^2}{27} - \frac{x^2}{10{,}392} = \frac{6\pi x^2}{27} - \frac{x^2}{10{,}392} = \frac{2\pi x^2}{9} - \frac{x^2}{10{,}392}$$

Setzt man statt π den Werth 3,141, so ist

$$\frac{2\pi x^2}{9} - \frac{x^2}{10{,}392} = \frac{6{,}282\, x^2}{9} - \frac{x^2}{10{,}392} = 0{,}698\, x^2 - \frac{x^2}{10{,}392} = \frac{6{,}253616\, x^2}{10{,}392} = 0{,}6017\, x^2$$

§. 353.

Die Peripherie einer Linsenlinie wie Fig. 98. ist $= 2{,}68151\,D$, wenn deren größerer Durchmesser yz $= D$ gesetzt wird. Die von dieser krummen Linie begränzte Fläche ist $= 0{,}54537\,D^2$

Beweis.

I.

Da der Winkel bao als Peripherie-Winkel den halben Halbkreis bco zu seinem Maße hat, und darum ein rechter Winkel ist, so ist auch der Winkel dap ein rechter Winkel, und hält folglich 90°. Es muß daher auch der Bogen dp als das Maß des Centriwinkels dap genau 90° halten, muß also den 4ten Theil der mit dem Radius ay gerissenen Kreislinie betragen. Da ay = as = sc = cz, so ist ay $= \frac{yz}{4} = \frac{D}{4}$

Da nun die mit dem Radius $\frac{D}{4}$ gerissene Peripherie $= \frac{3{,}14159D}{2}$ ist, so ist der Bogen dp als der vierte Theil derselben $= \frac{3.14159D}{8}$; eben so groß ist auch der Bogen gh; mithin beide $= \frac{3{,}14159D}{4} = 0{,}78539D$

Der Bogen dh ist nun offenbar der vierte Theil einer mit dem Radius od oder $\frac{D}{4} +$ oa gerissenen Kreislinie. Da aber oa nicht bekannt ist, so suche man selbe, und setze ihre Größe vorläufig $= x$, so ist

$$x^2 = \frac{D^2}{16} + \frac{D^2}{16} = \frac{2D^2}{16} = \frac{D^2}{8}$$

$$x = \frac{D}{\sqrt{8}} = \frac{D}{2{,}82842} = 0{,}35355D$$

Also od $= 0{,}25D + 0{,}35355D = 0{,}60355D$

Eine mit dem Radius od gerissene Peripherie ist also $= 1{,}20711D \times 3{,}14159$

Der vierte Theil einer solchen Peripherie oder der Bogen dh ist demnach $\frac{1{,}20711D \times 3{,}14159}{4}$

Es ist also auch pg eben so groß; folglich

$$dh + pg = \frac{1{,}20711D \times 3{,}14159}{2} = 0{,}603555D$$

$\times 3{,}14159 = 1{,}89612D$

Die ganze Linsenlinie hält also $0{,}78539D + 1{,}89612D = 2{,}68151D$

II.

Die von der Linsenlinie begränzte Fläche besteht aus den zwei gleichen Kreisausschnitten dap und hcg, ferner aus dem Kreisausschnitte doh und aus dem diesem gleichen Kreisausschnitte pbg weniger dem Quadrate abco.

Da der Bogen des Kreisausschnittes dap $= \frac{\pi D}{8}$, und der Radius desselben $= \frac{D}{4}$ ist, so ist dap

$$= \left(\frac{\pi D}{8} \times \frac{D}{4}\right) : 2 = \frac{\pi D^2}{64}$$

Es ist also auch der Kreisausschnitt hcg $= \frac{\pi D^2}{64}$

Mithin dap + hcg $= \frac{\pi D^2}{64} \times 2 = \frac{\pi D^2}{32} = 0{,}09817D^2$

Da nach Nro. I. der Bogen dh des Kreisausschnittes doh $= \frac{1{,}20711D \times 3{,}14159}{4}$, und der Radius od $= 0{,}60355D$, so ist der Kreisausschnitt doh

$$= \frac{1{,}20711D \times 3{,}14159 \times 0{.}60355D}{8}$$

Da ferner der Kreisausschnitt pbg dem Kreisausschnitte doh gleich ist, so ist doh + pbg

$$= \frac{1{,}20711D \times 3{,}14159 \times 0{,}60355D}{4} = 0{,}5722D^2$$

Das Quadrat abco ist offenbar $= \frac{D}{\sqrt{8}} \times \frac{D}{\sqrt{8}} = \frac{D^2}{8}$
$= 0{,}125D^2$

Mithin ist die ganze von der Linsenlinie begränzte Fläche
$= 0{,}09817D^2 + 0{,}5722D^2 - 0{,}125D^2 = 0{,}54537D^2$

§. 354.

Hat man (Fig. 103.) den Mittelpunkt und die beiden Axen einer Ellipse zu suchen, so ziehe man innerhalb der Ellipse ein Paar beliebige Parallel-Linien ab und ed, und theile beide bei m und n in zwei gleiche Theile. Nun ziehe man durch m und n eine gerade Linie gh, und theile dieselbe ebenfalls in o in zwei gleiche Theile, so ist o der Mittelpunkt der Ellipse. Nun beschreibe man aus o mit beliebiger Zirkelöffnung eine Kreislinie, welche die Ellipse in den Punkten i, k, l und p schneidet. Theilt man nun die Weite ik und lp bei r und s in zwei gleiche Theile, so kann man rs als die kürzere Axe der Ellipse ziehen, und auf diese durch o die größere Axe senkrecht aufsetzen.

§. 355.

Hat man zu einer gegebenen Ellipse eine andere parallel zu ziehen, so trage man (Fig. 104.) die Weite ab, wenn dieses die Entfernung der beiden Ellipsen ist, auf der Axe von c nach d. Die Entfernung od trage man nun aus a auf die größere Axe, so werden dadurch die beiden Punkte f und g als die Brennpunkte der parallelen Ellipse bezeichnet, und letztere kann nun nach §. 348. gezeichnet werden.

§. 356.

Hat man den Quadratinhalt einer elliptischen Fläche zu suchen,
so multiplizire man die Kreislinie, deren Diameter die größere Axe ist, mit dem vierten Theile der klei-

*Obwohl die Ellipse nicht hieher gehört, so habe ich sie doch ihres häufigen Vorkommens wegen nicht unbeachtet lassen wollen.

neren Axe. Läßt sich letztere nicht bequem in vier gleiche Theile zertheilen, so kann mit der ganzen Axe multiplizirt, und das Produkt durch 4 dividirt werden.

Hat man die zwischen zwei parallelen Ellipsen liegende Fläche, einen elliptischen Ring (Fig. 104.) zu berechnen, so subtrahire man den Flächeninhalt der kleinern Ellipse von dem der größern.

Die Ellipse selbst verhält sich zum Kreise, dessen Diameter die große Axe ist, wie sich die kleine Axe zur großen verhält.

Zwei Ellipsen verhalten sich ihrem Flächeninhalte nach wie die Produkte ihrer beiden Axen.

§. 257.

Die Peripherie einer Eylinie, wie Fig. 100, ist $= 3{,}601666D$. Der Inhalt der von der genannten krummen Linie begränzten Fläche ist $= 0{,}99547 D^2$, wenn D den kleinern Durchmesser ab bezeichnet.

Beweis ad 1). Der Bogen acb ist offenbar ein Halbkreis, dessen Diameter $= D$. Nun aber ist die Peripherie eines mit dem Diameter D gerissenen Kreises $= \pi D$, folglich die des Halbkreises $= \frac{\pi D}{2}$

Der Bogen bk ist offenbar ein Stück einer mit dem Diameter $2D$ gerissenen Peripherie, welche $2\pi D$ ist. Da der Winkel ahe ein rechter Winkel, mithin $a + e = 90°$, also $a = 45°$, weil $a = e$ ist, so ist $bk = \frac{2\pi D}{8} = \frac{\pi D}{4}$

Da ai mit bk vollkommen einerlei, so ist $ai + bk = \frac{\pi D}{2}$, mithin der Bogen $iacbk = \frac{\pi D}{2} + \frac{\pi D}{2} = \pi D$

Der Bogen ik ist offenbar der vierte Theil einer mit dem Radius ei gerissenen Kreislinie, weil der Winkel iek ein Scheitelwinkel zu aeb, und $aeb = 90°$, weil jeder seiner beiden Theile aeh und $beh = 45°$. Nun aber ist $ei = bi - be$. Setzt man $be = x$, so ist $x^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{D^2}{4} = \frac{2D^2}{4} = \frac{D^2}{2}$ also $x = \frac{D}{\sqrt{2}}$ mithin ei

$= D - \frac{D}{\sqrt{2}}$; also der Diameter der Kreislinie, wovon ik der vierte Theil ist, $= 2D - \frac{2D}{\sqrt{2}}$, demnach die Peripherie $2\pi D - \frac{2D}{\sqrt{2}}$; also ik $= \left(2D - \frac{2D}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{4}$

Die Peripherie der Eylinie ist also

$= \pi D + \left(2D - \frac{2D}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{4} = \left(4\pi D + 2\pi D - \frac{2\pi D}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{4} = \left(4 + 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\frac{D}{4} = \left(6 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi D}{4}$
$= 3{,}6016666D$.

Beweis ad 2. Das Stück acb ist offenbar eine halbe Kreisfläche. Da nun die Peripherie $= \pi D$, der Radius $= \frac{D}{2}$, so ist die ganze Kreisfläche $= \left(\pi D \times \frac{D}{2}\right)\frac{1}{2}$
$= \frac{\pi D^2}{4}$, folglich die halbe Kreisfläche $= \frac{\pi D^2}{8}$

Das Stück abk ist offenbar ein Kreisausschnitt, dessen Bogen nach Nro. 1 $= \frac{\pi D}{4}$, und dessen Radius $= D$ ist. Es ist folglich der Kreisausschnitt $= \left(\frac{\pi D}{4} \times D\right)\frac{1}{2}$
$= \frac{\pi D^2}{8}$

Der Kreisausschnitt abi ist also auch $= \frac{\pi D^2}{8}$

Das Stück iek ist offenbar der vierte Theil einer Kreisfläche mit dem Radius ei, welcher nach Nr. 1. $= D - \frac{D}{\sqrt{2}}$. Die Peripherie ist also $= 2\pi D - \frac{2\pi D}{\sqrt{2}}$. Der Flächeninhalt des ganzen Kreises $= \left(2\pi D - \frac{2\pi D}{\sqrt{2}}\right)$
$\left(D - \frac{D}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2} = \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\pi D \times \frac{D}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi D^2}{2}$, mithin der Flächeninhalt des Kreisausschnittes iek $= \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi D^2}{8}$

Der Flächeninhalt des Dreieckes aeb ist $= \left(D \times \frac{D}{2}\right)\frac{1}{2}$ $= \frac{D^2}{4}$

Demnach ist die ganze von der Eylinie begränzte Fläche $= \frac{\pi D^2}{8} + \frac{\pi D^2}{8} + \frac{\pi D^2}{8} + \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\frac{\pi D^2}{8} \frac{2D^2}{8} = \frac{\pi 3D^2 + \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1}}\right)\pi D^2 - 2D^2}{8}$

$= \left[\left(3 + (2 - \frac{2}{\sqrt{2}})(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\right)\pi - 2\right]\frac{D^2}{8}$

$= \left((3 + 0{,}58579 \times 0{.}292892)\pi - 2\right)\frac{D^2}{8} = 3{,}17157\pi$ $- 2)\frac{D^2}{8} = (9{,}96377 - 2)\frac{D^2}{8} = \frac{7{,}96377 D^2}{8} = 0{,}99547\, D^2$

Stereometrie.

§. 358.

Unter Stereometrie versteht man jenen Theil der Geometrie, welcher von den Körpern handelt. (§. 245.)

Unter einem Körper versteht man eine Größe, an welcher wir Länge, Breite und Dicke (Höhe, Tiefe) unterscheiden. (§. 241.)

Die Gränzen eines Körpers sind Flächen. Jene Fläche, auf welcher man sich einen Körper ruhend denkt, und mitunter auch die damit parallel liegende Gränzfläche nennt man die Grundfläche des Körpers; alle andere Gränzflächen desselben nennt man seine Seitenflächen. Alle Gränzflächen eines Körpers zusammengenommen, nennt man die Oberfläche desselben. Es ist also stets die Summe aller Gränzflächen eines Körpers gleich seiner Oberfläche.

Die Neigung von drei oder mehreren Gränzflächen eines Körpers, welche in Einem Punkte zusammen laufen, nennt man eine körperliche Ecke oder einen körperlichen Winkel; die Linie, in welcher zwei Gränzflächen eines Körpers zusammenstoßen, nennt man eine Kante. Eine gerade Linie, welche von der (obersten) Spitze, oder auch vom Mittelpunkte der obersten Gränzfläche auf den Mittelpunkt der Grundfläche gezogen wird, nennt man die Axe eines Körpers. Steht diese Axe senkrecht auf der Grundfläche, so nennt man den Körper einen senkrechten, steht die Axe schief auf der Grundfläche, so nennt man ihn einen schiefen.

Eine senkrechte Linie, welche vom obersten Punkte der Axe auf die Grundfläche gefällt ist, nennt man die Höhe des Körpers; bei senkrechten Körpern ist daher Höhe und Axe einerlei; bei schiefen fällt die Höhe bisweilen auf die verlängerte Grundfläche.

§. 359.

Die Körper werden eingetheilt:

a) in reguläre, welche von lauter regulären und unter sich congruenten Flächen begränzt werden, und in denen auch alle körperliche Winkel gleich sind;

b) in irreguläre, bei denen dieses nicht der Fall ist.

§. 360.

Es gibt blos fünf reguläre Körper:

a) Das Tetraeder, welches von vier regulären und unter sich congruenten Dreiecken begränzt wird.

b) Das Hexaeder, den Würfel oder Cubus, welches von sechs gleichen Quadraten begränzt wird.

c) Das Oktaeder, welches von acht regulären und unter sich congruenten Dreiecken begränzt wird.

d) Das Dodekaeder, welches von zwölf regulären und unter sich congruenten Fünfecken begränzt wird.

e) Das Ikosaeder, welches von zwanzig regulären und unter sich congruenten Dreiecken begränzt wird.

§. 361.

Hat man das Netz zu einem Tetraeder zu zeichnen, so mache man (Fig. 105.) ein gleichseitiges Dreieck acf, theile jede seiner Seiten bei d, e und b in zwei gleiche Theile, und ziehe dann die Linien de, db und be. Nun schneide man, wenn die Figur auf Kartenpappendeckel gezeichnet wurde, das Dreieck acf ganz heraus, nach den Linien de,

db und bc schneide man den Pappendeckel halb durch, so daß die Dreiecke adb, bce und def leicht über die Grundfläche bde des Tetraeders können heraufgebogen werden. Nun befestige man mit Leim oder Gummi an einander die Seiten ab und bc, ad und fd, ec und ef. Endlich bestreiche man den so gefertigten Körper mit irgend einer Farbe.

§. 362.

Hat man das Netz zu einem Hexaeder zu zeichnen, so ziehe man (Fig. 106.) die Linie ai, und trage auf ihr die Seite des Würfels viermal auf. Nun errichte man auf den Mittelpunkt e einen Perpendikel om, und trage auf diesen die Seite des Würfels einmal unter e nach m, und zweimal über e nach f und o. Eben so errichte man einen Perpendikel auf c und trage auch auf diesen die Seite des Würfels einmal unter c nach l, und zweimal über c nach d und n. Nun ziehe man df, und trage auf ihre Verlängerung die Seite des Würfels von d nach b und von f nach, h und k. Endlich ziehe man die Linien ab, lm, no gh und ik.

§. 363.

Hat man das Netz zu einem Octaeder zu zeichnen, so mache man zuerst (Fig. 107.) das Netz ace zu einem Tetraeder. Nun verlängere man die Grundlinie ac des gleichseitigen Dreieckes ace bis nach d, so daß bd = ac wird. Nun verlängere man fb bis k, und trage fb aus b nach h, und aus h nach k. Eben so verlängere man ec, und trage aus c die Linie cg nach i. Nun ziehe man dik, ch und hi.

§. 364.

Hat man das Netz zu einem Dodekaeder zu zeichnen, so konstruire man vor Allem (Fig. 108.) ein reguläres Fünfeck cdefg, und errichte auf alle fünf Seiten desselben congruente reguläre Fünfecke. Fügt man nun an diese sechs Fünfecke bei ab eben

solche sechs nach Anweisung der Figur, so ist das Netz gezeichnet.

§. 365.

Hat man das Netz zu einem Ikosaeder zu zeichnen, so ziehe man (Fig. 109.) die Linie hk und trage auf selbe eine Seite des Ikosaeders fünfmal auf. Nun errichte man ober- und unterhalb ki die gleichseitigen Dreiecke kai und kli, trage auf die verlängerte ai die Seite ai von i nach c, und auf die verlängerte li die Seite li von i zweimal auf, und verfahre so fort nach Anweisung der Figur.

*Obgleich der archimedische Körper, welcher von 18 gleichen Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken begränzt wird, nicht zu den regelmäßigen Körpern gehört, so habe ich doch das Netz dazu in Fig. 110. angegeben, weil er in den Künsten nicht selten vorkommt.

§. 366.

Ein Körper, welcher von sechs Parallelogrammen so begränzt wird, daß von letzteren je zwei einander gegenüber liegende congruent und parallel sind, wird ein Parallelepipedum genannt, und zwar ein rechtwinkeliges, wenn alle sechs Seitenflächen Rechtecke sind, oder auch ein schiefes, wenn zwei von den Seitenflächen Rauten sind. Sind die sechs Seitenflächen eines rechtwinkeligen Parallelepipedum lauter gleiche Quadrate, so nennt man dasselbe einen Cubus oder Würfel, ein Hexaeder. Auch kann jedes Parallelepipedum als ein vierseitiges Prisma (Säule) betrachtet werden. Da alle Perpendikel zwischen parallelen Flächen einander gleich sind, so kann jede auf der Grundfläche senkrecht stehende Kante und überhaupt jeder Perpendikel zwischen den Perimetern der beiden Grundflächen als die Höhe des Parallelepipedum betrachtet werden.

Hat man das Netz zu einem senkrechten Parallelepipedum zu zeichnen, wovon die Länge fd, die Breite fn, und die Dicke fh gegeben sind, so ziehe man (Fig. 111.) eine gerade Linie, und trage darauf

die gegebene Länge fd, so wie aus f und d die Dicke fh nach c und l. Nun errichte man auf d und f Perpendikel, trage auf diese aus d und f die Dicke fh nach h und g, aus g und h die Breite fn nach k und i. Eben so trage man die Breite fn aus d und f abwärts nach n und e, und aus n und e die Dicke fh nach a und b. Nun ziehe man die geraden Linien ab, ne, gh und ki. Die Linie ne verlängere man, daß man aus n und e noch die Dicke fh nach m und o tragen kann. Endlich ziehe man noch die Linien lm und co.

Hat man (Fig. 112.) das Netz zu einem schiefen Parallelepipedum zu zeichnen, wozu eine rautenförmige Gränzfläche lghm und die Breite bg der anliegenden Seite gegeben ist, so zeichne man vor allen Dingen die gegebene Raute lghm, errichte auf g einen Perpendikel bg von der verlangten Größe, construire nun das Rechteck bghc, und ziehe die Linie mz, welche gh in x rechtwinkelig schneidet, und über m und z unbestimmt verlängert werde. Eben so verlängere man die Linien bc und gh unbestimmt über b, c, g und h. Nun trage man xm von z nach d, mh von c nach i, von h nach k, von b nach e, von g nach f. Endlich verlängere man lg bis q, trage bq von g nach p, und ziehe bp unbestimmt über b hinaus. Nun trage man gl von b nach a, ziehe al unbestimmt über l hinaus, und trage bg von l nach n, und von m nach o. Nun schneide man die Figur adcikhmonlgfeb ganz aus, schneide den Pappendeckel nach den Linien bc, bg, ch, gh, lm halb durch, und lege die Figur zusammen.

Der körperliche (kubische) Inhalt eines Parallelepipedum wird gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt.

Bew. Man denke sich ein rechtwinkeliges Parallelepipedum von der Form eines gewöhnlichen Mauerziegels, welches 14′ lang, 7′ breit und 3′ dick ist. Offenbar wird man dieses Parallelepipedum in 3 Platten von 14′ Länge, 7′ Breite und 1′ Dicke zerschneiden können. Jede dieser Platten wird man wieder in 7 Pa-

rallelepipedische Körper von 14′ Länge, 1′ Breite und 1′ Dicke zerschneiden können, und jeder dieser letzteren wird sich in 14 Würfel von 1′ Länge, 1′ Breite, 1′ Dicke, d. i. in 14 Cubikzoll zerschneiden lassen. Wenn aber ein solcher Körper 14 Cubikzoll hält, so müssen 7 solche Körper oder eine der oben berührten Platten offenbar 7mal 14 oder 98 Cubikzoll und drei solche Platten, oder der auszumessende Körper, offenbar 3mal 98 oder 294 Cubikzoll halten. Man hat also 14 multiplizirt mit 7 (die Grundfläche gesucht) und das Produkt mit 3 multiplizirt (die Grundfläche des Parallelepipedums mit der Höhe desselben multiplizirt).

Da man sich (Fig 116.) ein schiefes Parallelepipedum adehbcfg durch einen Schnitt bceh in zwei Theile getheilt denken kann, wovon der eine bcfgeh so an den andern gelegt werden kann, daß dadurch ein rechtwinkeliges Parallelepipedum adehyxbc entsteht, welches mit dem schiefstehenden vollkommen einerlei ist, so geht daraus hervor, daß auch der Cubikinhalt des schiefen Parallelepipedum gefunden wird, wenn man seine Grundfläche adeh mit seiner Höhe be multiplizirt.

Ist der Cubikinhalt eines Parallelepipedum bekannt und die Grundfläche, so dividire man den Cubikinhalt durch die Grundfläche, und man findet die Höhe.

Ist die Höhe und der Cubikinhalt des Parallelepipedum gegeben, so dividire man letzteren durch die Höhe, und man findet die Grundfläche; ist nun von der Grundfläche auch die Grundlinie oder Höhe bekannt, so darf man nur die Grundfläche durch das Bekannte dividiren, und man findet das Unbekannte.

§. 367.

Aufgabe. Was bedarf man alles zur Herstellung einer 114,8′ langen, 15′ hohen und 2′ breiten Mauer aus Backsteinen?

Annahme. Bei einer Mauer rechnet man $\frac{4}{5}$ des cubischen Inhalts für Steine und $\frac{1}{5}$ für Bindemate-

rial. Multiplizirt man die $\frac{4}{5}$ mit 7, so erhält man die Anzahl der nöthigen Steine, weil 7 Backsteine auf den Cubikfuß gerechnet werden.*) Zu dem Bindematerial braucht man so viel Sand, als das Fünftel selbst beträgt, oder des Verlurstes wegen wohl noch mehr. $\frac{1}{3}$ von der Anzahl Kubikschuh Sand gibt die Anzahl der nöthigen Metzen Kalkes. Ein Maurer kann täglich 250 bis 300 Steine vermauern, und braucht dazu zu ebener Erde und in wenig tiefem Grunde $\frac{2}{3}$ Handlanger. Ferner ist auf 1 Maurer $\frac{1}{8}$ Mörtelmacher und $\frac{1}{12}$ Polier oder Meister zu rechnen.

Auflösung. Der Cubikinhalt der Mauer beträgt 114.5 X 15 X 2 = 3435 Cubikfuß. Nimmt man hievon das Fünftel, 687, so ist dieß die Zahl der nöthigen Cubikschuh Sand. Dividirt man dieß mit 3, so findet man 229, die nöthige Zahl der Metzen Kalk. Multiplizirt man das Fünftel 687 mit 4, so findet man 2748 Cubikschuh Steine. Multiplizirt man diese mit 7, so findet man 19236, die Anzahl der nöthigen Steine. Dividirt man letztere durch 300, so findet man 64, die beiläufige Anzahl der nöthigen Maurer, 42, die beiläufige Anzahl der Handlanger, 8 die nöthige Anzahl der Mörtelmacher, und 5 die nöthige Anzahl Poliere.

*Nun kann man die Arbeit auf mehrere Tage vertheilen, wie es eben in Rücksicht auf die Zahl der Handlanger und Mörtelmacher am zuträglichsten erscheint.

Man bedarf also:

8 Maurer 8 Tage á 48 kr.	51 fl. 12 kr.
6 Handlanger 8 Tage á 36 kr.	36 „ 48 „
1 Mörtelmacher 8 Tage á 40 kr.	5 „ 20 „
1 Polier 8 Tage á 1 fl.	8 „ — „
19236 Backsteine á 12 fl. pr. 1000	230 „ 50 „
229 Metzen Kalk á 22 kr.	83 „ 58 „
687 Cubikf. oder 39 Fuhren Sand á 20 kr.	13 „ — „
	429 fl. 8 kr.

*) Diese Annahme ist jedoch nach den verschiedenen Größen der Backsteine zu reguliren.

*Daß auf diese Art nur der wahrscheinliche Betrag der Kosten gefunden werde, versteht sich wohl von selbst.

**Ist eine Mauer mit Fenstern und Thüren versehen, so berechnet man den Cubikinhalt derselben auf folgende Art: Man suche den Flächeninhalt der Außenseite der Wand, und ziehe die Flächeninhalte der Fenster und Thüren davon ab; nun multiplizire man mit der Dicke der Mauer. Die Schmiegen bei Fenstern und Thüren werden nicht in Anschlag gebracht, weil durch das Behauen der Steine wieder verloren geht, was man des dadurch verminderten Cubikinhaltes wegen weniger gebrauchen würde. Eben so muß man, weil die Mauern gewöhnlich von einem Stockwerke zum andern in ihrer Dicke abnehmen, jedes Stockwerk besonders berechnen. Gewölbe denkt man sich größtentheils aufgerollt als Parallelepipeda, wo man bei der Berechnung des Bogens zum Radius die halbe Dicke des Gewölbes addirt, den gefundenen Bogen mit der Dicke und Länge des Gewölbes multiplizirt.

§. 368.

Ein Körper, welcher von zwei parallelen congruenten Figuren, und eben so vielen Parallelogrammen, als jede jener beiden Figuren Seiten hat, vollkommen begränzt wird, heißt ein Prisma oder eine Säule. Die beiden parallelen congruenten Figuren nennt man die beiden Grundflächen, und die Parallelogramme nennt man die Seitenflächen.

Prismen heißen drei-, vier- oder vielseitig, je nachdem die Grundflächen drei, vier oder mehr als vier Seiten haben. Sind die beiden Grundflächen Kreise, so nennt man das Prisma einen Cylinder eine Walze, Rundsäule. Man kann annehmen, daß der Cylinder dadurch entstehe, daß sich ein Rechteck um eine seiner Seiten dreht, bis es wieder in seine vorige Lage kommt. Endlich nennt man die Prismen senkrecht oder schief, je nachdem

die Seitenflächen senkrecht oder schief auf den Grundflächen stehen, gleichseitig oder ungleichseitig, je nachdem die Seiten der Grundflächen gleich oder ungleich sind.

§. 369.

Hat man das Netz zu einem (hier zu einem dreiseitigen) Prisma zu zeichnen, so zeichne man sich vor Allem eine der Grundflächen. Nun verlängere man (Fig. 113.) eine Seite ce dieser Grundfläche, und trage auf diese Verlängerung die übrigen Seiten ei, ic der Grundfläche der Ordnung nach auf g und a Auf die Punkte c, e, g und a errichte man nun Perpendikel von gleicher Größe, so werden dadurch die Punkte d, f, h und b bestimmt, und können durch die gerade Linie db zusammen gezogen werden. Nun errichte man noch auf df eine mit der bereits gezeichneten Grundfläche congruente Figur dzf.

*Dieses Verfahren könnte man auch beobachten um das Netz zu einem Würfel oder zu einem Parallelepipedum zu zeichnen; denn beide können auch als Prismen betrachtet werden; auch sind schiefe Prismen auf ähnliche Art zu zeichnen, wie ein schiefes Parallelepipedum.

Hat man (Fig. 114) das Netz zu einem Cylinder zn zeichnen, so setzt man als Grundflächen Kreise, und stellt die Seitenfläche als Rechteck dar, dessen Höhe die Höhe des Cylinders, und dessen Grundlinie die Peripherie der Grundfläche; man theilt gewöhnlich den Diameter in 7 gleiche Theile, und gibt der oben erwähnten Grundlinie die Größe von 22 solchen Theilen.

§. 370.

Der körperliche Inhalt eines Prismas wird gefunden, wenn man die Grundfläche desselben mit seiner Höhe multiplizirt.

Der Beweis für das vierseitige Prisma, dessen

Grundfläche ein Parallelogramm ist, ist bereits geliefert, weil dieses als ein Parallelepipedum betrachtet werden kann. Da man aber ein solches vierseitiges Prisma (Fig. 115.) exafhmzg durch einen Schnitt efhg in zwei dreiseitige Prismen zertheilen kann, die, weil alle Seitenflächen und die beiden Grundflächen in dem einen wie in dem andern sind, vollkommen gleich sind, so geht daraus hervor, daß auch der Kubikinhalt des dreiseitigen Prismas gefunden werde, wenn man die Grundfläche $\frac{hz \times zg}{2}$ (man denke sich nämlich die Fläche hmzg des vierseitigen Prismas rechtwinkelig und das Prisma selbst senkrecht) mit der Höhe za multiplizirt,

Beweis. $efahgz = \frac{hz \times zg \times za}{2}$

$$exafhmzg = 2efahgz$$
$$exafhmzq = hz \times zg \times za$$

$$2efahgz = hz \times zg \times za$$
$$efahgz = \frac{hz \times zg \times za}{2}$$

Da man sich endlich jedes vielseitige Prisma durch Schnitte in lauter dreiseitige Prismen getheilt denken kann, so ist auch der Kubikinhalt eines jeden mehr als dreiseitigen Prismas, also auch des Cylinders, oder des unendlichseitigen Prismas, gleich seiner Grundfläche multiplizirt mit seiner Höhe. Man denke sich ein sechsseitiges Prisma, das durch drei Schnitte so in vier dreiseitige Prismen getheilt ist, daß dessen Grundfläche abcdef in vier Dreiecke, die wir mit x, y, z, m bezeichnen wollen getheilt ist. Wenn wir nun die Höhe des sechsseitigen Prismas = u setzen, so wird auch die Höhe eines jeden der dreiseitigen Prismen = u seyn. Die vier dreiseitigen Prismen zusammengenommen, oder die sechsseitige Säule, sind also = xu + yu + zu + mu = (x + y + z + m) u = abcdef $\times$ u d. i. = der Grundfläche der sechsseitigen Säule multiplizirt mit ihrer Höhe.

Der körperliche Inhalt eines Würfels (eines vierseitigen Prismas, dessen Grundflächen Quadrate, und

dessen Höhe gleich einer Seite der Grundfläche) wird gefunden, wenn man eine Seite zum Cubus erhebt.

Wenn der Cubikinhalt und die Höhe eines Prismas gegeben ist, so darf man nur den Cubikinhalt durch die Höhe dividiren, und man findet die Grundfläche. Ist die Grundfläche und der Cubikinhalt bekannt, so dividire man letzteren durch die Grundfläche, und man findet die Höhe.

Ist der Cubikinhalt eines Würfels bekannt, so darf man daraus nur die Cubikwurzel ziehen, und man findet die Seite.

*Eine Mauer mit Böschung kann als Prisma betrachtet werden. Man denke sich dann den auf die Böschung senkrechten Durchschnitt als Grundfläche, nnd die Länge der Mauer als Höhe des Prismas. Auf dieselbe Art könnte man auch Pfeiler mit Schmiegen berechnen; nur müßte hier die Grundfläche des Pfeilers auch als Grundfläche des Prismas betrachtet werden.

§. 371.

Aufgabe. Ein oben und unten gleich weites Gefäß, dessen Grundfläche ein Quadrat darstellt, soll bei einer Höhe von 15,7′ genau hundert Cubikfuß Wasser halten. Wie groß muß die Seite der Grundfläche seyn?

Auflösung. Die Seite der Grundfläche sey x, so ist die Grundfläche selbst $= x^2$. Multiplizirt man die Höhe 15,7 mit x^2, so erhält man $15,7x^2$ als einen Ausdruck für den Cubikinhalt des Gefäßes. Als solcher ist aber auch gegeben 100 Cubikfuß. Verbindet man diese beiden verschiedenen Ausdrücke für eine und dieselbe Größe durch das Gleichheitszeichen mit einander, so entsteht die Gleichung:

$$15,7\,x^2 = 100$$
$$x^2 = \frac{100}{15,7}$$
$$x^2 = 6,36 +$$
$$x = \sqrt{6,36} = 2,52 +$$

Die Seite der Grundfläche beträgt also etwas über 2,52 Fuß.

§. 372.

Denkt man sich einen cylindrisch gebauten Thurm, dessen Wand durchgehends gleiche Dicke hat, und setzt man den Radius, der die innere Oberfläche der Wand berührt, $= r$, den, welcher die äußere Oberfläche der Wand berührt, $= R$, die Höhe des Thurmes aber $= h$, so ist der Cubikinhalt der Mauer $= (R + r)\ (R - r)\ \pi h$.

Beweis. Man denke sich den leeren Raum innerhalb der Mauer als einen Cylinder, dessen Radius $= r$ und die Wand sammt dem innern Raume auch als einen Cylinder, dessen Radius $= R$, die Höhe beider Cylinder aber setze man $= h$. Subtrahirt man nun den erstern vom letzteren, so ist die Differenz offenbar gleich dem Cubikinhalte der Mauer. Wenn aber der Radius der Grundfläche des größern Cylinders $= R$, so ist der Diameter $= 2R$, die Peripherie also $= 2\pi R$, der Flächeninhalt $= \frac{2\pi R \times R}{2}$ $= \frac{2\pi R^2}{2} = \pi R^2$. Multiplizirt man nun die Grundfläche πR^2 mit der Höhe h, so ist der Cubikinhalt des größern Cylinders offenbar $= \pi R^2 h$. Aus gleichem Grunde wird der Cubikinhalt des kleinern Cylinders $= \pi r^2 h$; mithin der Cubikinhalt der Mauer $= \pi R^2 h - \pi r^2 h = (R^2 - r^2)\ \pi h = (R + r)\ (R - r)\ \pi h$.

*Wie nun außer der im §. 367 angegebenen Methode der Cubikinhalt der sogenannten Tonnengewölbe gefunden werde, die blos Theile der hier vorkommenden Mauer sind, läßt sich von selbst finden. —

§. 373.

Ein Prisma, dessen Grundflächen Kreisausschnitte sind, nennt man einen Walzenausschnitt, auch eine Viertelwalze, eine halbe Walze, u. s. f. je nachdem die Grundfläche der vierte, halbe Theil u. s. f. einer Kreisfläche ist. Sind die Grundflächen Kreisabschnitte, so nennt man das Prisma einen Walzenabschnitt. In beiden Fällen wird auch hier der kubische Inhalt

des Prismas gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt, weil man auch sie in lauter dreiseitige Prismen zertheilt denken kann.

§. 374.

Schneidet man (Fig. 117) eine senkrechte Viertel-Walze nach der Diagonale a c ihrer Grundfläche in senkrechter Richtung des Halbmessers a d, so nennt man den Theil a d c b einen Viertel-Walzenabschnitt, und das übrig gebliebene Stück c d e f das Complement, (Ergänzungsstück) eines Viertel-Walzenabschnitts.

§. 375.

Die gebogene Oberfläche b c d eines Viertel-Walzenabschnitts ist gleich a b ╳ b c, also noch so groß als seine Grundfläche.

Beweis. (Fig. 118) Man denke sich den ganzen Abschnitt parallel mit der Grundfläche in lauter gleiche sehr kleine Theile zerschnitten, so sind m l q p und l k r q Oberflächen dieser Theile, und die Dreiecke a b c, i m p, h l q einander ähnlich, weil sie durch lauter parallele Schnitte entstehen. Nimmt man nun der Deutlichkeit halber den Bogen k l m als eine gerade Linie oder Tangente des Boges an, welches, weil man sich die Theile unendlich klein denkt, ohne Anstand geschehen kann, so gibt die Oberfläche k r p m ein Trapez, und k m multiplizirt mit der mittleren Länge l q den Flächeninhalt desselben (§. 305). Es ist aber k m ╳ l q = g i ╳ b c, welches auf folgende Art gezeigt werden kann.

Man ziehe k n senkrecht auf i m, und aus a den Halbmesser a l, so sind die Dreiecke k n m und l h a einander ähnlich; denn der Halbmesser a l macht mit der Tangente k m bei l einen rechten Winkel; das kleine Dreieck k l o ist also bei l rechtwinkelig, und wird durch die aus der Spitze des rechten Winkels herabgelassene senkrechte l x in zwei ähnliche rechtwinkelige Dreiecke k x l und l x o getheilt. (§. 315) Es ist aber l x

parallel mit nm, folglich das Dreieck kxl ähnlich dem Dreiecke knm. (§. 310.) Ferners ist xo parallel mit ha, also auch lxo ähnlich mit lha. Es sind daher auch die Dreiecke lha und knm einander ähnlich; folglich verhält sich:

la : lh = km : kn.

Setzt man anstatt la die gleiche ab, und anstatt kn die gleiche gi, so erhält man:

ab : lh = km : gi

In den ähnlichen Dreiecken abc und hlq ist ebenfalls:

ab : lh = bc : lq,

Es ist also auch: km : gi = bc : lq

und die Produckte der äußern und innern zwei Glieder

$$km \times lq = gi \times bc,$$

welches zu erweisen war.

Da nun dieses von allen abgeschnittenen Stücken erwiesen werden kann, und ihre gesammten Höhen den Halbmesser ausmachen, so ist der Halbmesser da oder ab multiplizirt mit bc gleich der Oberfläche aller Trapeze, oder der gebogenen Oberfläche des Viertel-Walzenabschnittes dcb, und daher letztere noch so groß als die Grundfläche acb.

§. 376.

Die gebogene Oberfläche cde (Fig. 117) des Complements eines Viertelwalzenabschnittes ist.

$$= \left(\frac{\pi - 2}{2}\right) ef \times ed = \frac{1,14159\ ef}{2} \times ed = 0,57079\ ef \times ed.$$

Beweis. Offenbar ist das Complement cde gleich der gebogenen Oberfläche bcde der Viertelswalze weniger der gebogenen Oberfläche bcd des Viertelwalzenabschnittes. Da nun ef der Radius der Walze, so ist der Diameter offenbar = 2ef, und die Peripherie = $2\pi \times ef$, folglich der vierte Theil der

Peripherie $= \frac{2\pi \times ef}{4} = \frac{\pi \times ef.}{2}$ Die gebogene Oberfläche der Viertelswalze ist also $= \frac{\pi \times ef \times ed.}{2}$

Die gebogene Oberfläche b c d des Viertelwalzenabschnittes ist (nach §. 375) $= ed \times ef$. Es ist also $cde = \frac{\pi \times ef \times ed}{2} - (ed \times ef) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) ef \times ed = \left(\frac{\pi - 2}{2}\right) ef \times ed = \frac{1,14159\, ef \times ed}{2}$ $= 0,57079\, ef \times ed.$

§. 377.

Schneidet man (Fig. 119.) von einer senkrechten halben Walze nach den Richtungen ac und ag ihrer Grundfläche zwei Viertelwalzenabschnitte hinweg, so bleibt ein Körper dcfge übrig, den man das Supplement (Ergänzungsstück) eines Halbwalzenabschnittes nennt.

Die gebogene Oberfläche eines Supplements eines Halbwalzenabschnittes ist $=$ $1,14159\, ef \times ed.$

Beweis. Man denke sich das Supplement durch die Fläche adef in Complemente von Viertelwalzenabschnitten getheilt. Da die gebogene Gränzfläche eines der letztern $= \frac{1,14159\, ef \times ed}{2}$ ist, so ist die des Supplements eines Halbwalzenabschnittes $=$ $1,14159\, ef \times ed.$

*Hat man daher den Cubikinhalt eines offenen Kreuzgewölbes zu berechnen, welches aus vier Supplementen eines Halbwalzenabschnittes besteht, so suche man, wenn die Grundfläche, wie gewöhnlich, ein Quadrat ist, die gebogene Oberfläche eines solchen Supplements, multiplizire sie mit der Dicke des Gewölbes, und nehme das Produkt 4mal. Den Radius betreffend sieh §. 367.

Z. B. Wie groß ist der kubische Inhalt eines Kreuzgewölbes, wenn der Durchmesser cg eines Bogens 12′, folglich ef genau 6′ und ed, weil das ganze ein

Quadrat ist, auch 6′ hält, und die Dicke des Gewölbes 1,5′ beträgt.

$$\begin{array}{r} 1,14159 \times 6 \times 6 \times 4 \times 1,5 \\ \hline 684945 \\ \hline 4109724 \\ \hline 16438896 \\ \hline 82194480 \\ \hline 246,583440 \end{array}$$ Kubikfuß.

§. 378.

Wenn man eine senkrechte Viertelwalze (Fig. 120) nach der Linie cn und nb senkrecht mit dem Halbmesser mn schneidet, so nennt man das Stück bnmc einen **Viertelwalzenausschnitt.**

Die gebogene Oberfläche bmc eines Viertelwalzenausschnittes ist = ab $\times$ bc, also noch einmal so groß als die Grundfläche.

Beweis. Denkt man sich die senkrechte Viertelwalze durch einen parallel mit qab gemachten Schnitt mne in zwei Theile getheilt, so ist offenbar emc die gebogene Oberfläche eines Viertelwalzenabschnittes, mithin = ne $\times$ ec.

Nun ist emc = ne $\times$ ec

Eben so ist emb = ne $\times$ eb

$$\begin{array}{l} \hline \text{emc} + \text{emb} = \text{ne} \times \text{ec} + \text{ne} \times \text{eb} \\ \text{emc} + \text{emb} = \text{ne}\,(\text{ec} + \text{eb}) \\ \text{ab} \times \text{bc} = \text{ne}\,(\text{ec} + \text{eb}) \\ \hline \text{emc} + \text{emb} = \text{ab} \times \text{bc} \\ \text{emc} + \text{emb} = \text{bmc} \\ \hline \text{bmc} = \text{ab} \times \text{bc} \end{array}$$

*Hat man also den Cubikinhalt eines geschlossenen Kreuzgewölbes oder eines Sterngewölbes über ein regelmäßiges Vieleck zu berechnen, deren Theile als Viertelwalzenausschnitte durchgehends noch einmal so groß sind als ihre Grundflächen, so braucht man nur das Doppelte der Grundfläche eines solchen Gewölbes mit der Dicke desselben zu multipliziren.

§. 379.

Eine **Pyramide** ist ein Körper, der von einer beliebigen geradlinigen Figur als Grundfläche, und lauter Dreiecken als Seitenflächen, so eingeschlossen ist, daß letztere sämmtlich in einem Punkte zusammenlaufen. Der Punkt außerhalb der Grundfläche, in welchem alle Dreiecke zusammenlaufen, heißt die **Spitze** der Pyramide. Ein Perpendikel, von der Spitze auf die Grundfläche oder deren Verlängerung gefällt, wird die **Höhe** der Pyramide genannt; die Linie, in welcher zwei Seitenflächen zusammenlaufen, nennt man eine **Seite** der Pyramide. Die Pyramiden sind **drei vier=vielseitig**, je nachdem sie drei, vier, oder mehr als vier Seitenflächen haben; gleichseitig oder ungleichseitig, jenachdem die Seitenflächen gleich oder ungleich sind.

*Das Netz einer Pyramide sieht man (Fig. 124) gezeichnet.

§. 380.

Wenn eine Pyramide parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt eine der Grundfläche ähnliche Figur.

Beweis. Die Pyramide adce (Fig. 121) sey parallel mit der Grundfläche durchschnittem, so ist gb parallel mit da, bm mit ac, gm mit dc. Folglich

$$\frac{\begin{array}{l} eg : gb = ed : da \\ eg : gm = ed : dc \end{array}}{}$$

$$\text{folglich}\quad eg : ed = gb : da$$

$$\text{und}\quad \frac{eg : ed = gm : dc}{gb : da = gm : dc}$$

$$\text{oder}\quad gb : gm = da : dc$$

Auf ähnliche Art läßt sich beweisen, daß gb : bm = da : ac Da sich nun die drei Seiten des Durchschnittes gbm so zu einander verhalten, wie die drei Seiten der Grundfläche dac, so geht daraus hervor, daß der Durchschnitt der Grundfläche ähnlich sey, (§. 313) und daß überhaupt alle Durchschnitte

einer Pyramide, die parallel mit der Grundfläche gemacht werden, einander ähnlich seyen.

§. 381.

Jede Seite der Grundfläche einer Pyramide verhält sich zur gleichnamigen eines parallelen Durchschnitts, wie die Höhe der Pyramide zum Abstande des Durchschnitts von der Spitze.

Beweis. Wenn (Fig. 121) der Durchschnitt gbm parallel mit dac, und eu ein Perpendikel von der Spitze auf die Grundfläche ist, so ist auch go parallel mit du.

Nun verhält sich eo : eu = eg : ed
ferner gm : dc = eg : ed
folglich eo : eu = gm : dc

Da sich nun gm zu dc verhält, wie jede andere Seite des Durchschnittes zur gleichnamigen der Grundfläche, so verhalten sich überhaupt die gleichnamigen Seiten des Durchschnittes und der Grundfläche wie eo : eu.

Es verhalten sich also auch gleichnamige Seiten solcher Durchschnitte, die der Grundfläche parallel gehen, wie die Abstände der Durchschnitte von der Spitze.

Die Durchschnitte selbst verhalten sich also wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze. (§. 310.)

§. 382.

Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich. (Fig. 122 und 123.)

Beweis. Es sey bcoe = BAC, af = KZ. Nun stelle man sich die beiden Höhen af und KZ in unendlich, doch gleich viele gleiche Theile getheilt, und durch alle Theilungspunkte zur Grundfläche Parallelebenen vor, so bestehen beide Pyramiden aus unendlich vielen abgestutzten Pyramiden, welche bei der unendlich kleinen Höhe als Prismen können betrachtet werden.

Ferner verhält sich

$$ghkl : bcoe = am^2 : af^2$$
$$EDF : BAC : Ku^2 : Kz^2$$

Nun ist $af = Kz$, am nehme man an $= Ku$

also $af^2 = Kz^2$, $am^2 = Ku^2$

Also $ghkl : bcoe = am^2 : Kz^2$
$$EDF : BAC = am^2 : Kz^2$$

$$ghkl : bcoe = EDF : BAC$$

Mithin $ghkl \times BAC = bcoe + EDF$
$$: BAC = : bcoe$$

$$ghkl = EDF$$

Eben so ist $nopq = HGJ$, und so sind überhaupt alle Durchschnitte in beiden Pyramiden einander gleich, wenn ihre Entfernungen von den Spitzen einander gleich sind.

Es haben also in beiden Pyramiden je zwei der kleinen Prismen gleiche Grundflächen und gleiche Höhen, und sind also einander gleich. Da nun die beiden Pyramiden gleich viele Prismen enthalten, die der Ordnung nach in der einen wie in der andern sind, so sind die Pyramiden selbst einander gleich.

§. 383.

Der Cubikinhalt einer Pyramide ist $= \frac{gh}{3}$, wenn g die Grundfläche und h die Höhe der Pyramide bezeichnet.

Beweis. Zerschneidet man ein hölzernes dreiseitiges Prisma (Fig. 126) von a nach der Richtung ac und ab, so erhält man eine Pyramide M. Zerschneidet man das übrige Stück von ad nach b so erhält man die Pyramiden N und V. Von diesen Pyramiden sind M und V einander gleich, weil sie beide bz zur Höhe haben, und weil M zur Grundfläche bcx, V zur Grundfläche zad hat, welche beiden Flächen einander gleich sind. Es ist also M = V. Fügt man nun die drei Pyramiden zu einem Prisma zusammen, wie dieß vor dem Zerschneiden war, legt dann das Prisma auf die

Seite zdbc, und nimmt die Pyramide M davon weg, so haben die beiden liegengebliebenen offenbar ihre Spitze in dem Punkte a. Da nun von dem Punkte a auf die Grundflächen, die wieder zu Einer Fläche vereinigt sind, nur Ein Perpendikel gefällt werden kann, so haben beide Pyramiden gleiche Höhen. Betrachtet man nun ihre Grundflächen, so wird man finden, daß jede derselben das halbe Rechteck zdbc sey, welches letztere durch eine Diagonale in zwei gleiche Theile getheilt ist, daß also auch ihre Grundflächen gleich sind; daß daher V = N sey. Da nun M = V und N = V, so muß auch M = N seyn.

Da nun die Pyramide M gleich ist dem dritten Theile eines Prismas von derselben Grundfläche bcx und von derselben Höhe ax, da ferner das Prisma = bcx × ax, so ist klar, daß auch die Pyramide gleich sey dem dritten Theile ihrer Grundfläche multiplizirt mit ihrer Höhe.

Denkt man sich eine Pyramide von n Seiten, deren Höhe gleich h, und deren Grundfläche gleich g, so wird sie in n dreiseitige Pyramiden, deren Höhe = h getheilt werden können. Heißt man nun jede der Grundflächen der so entstandenen dreiseitigen Pyramiden m, so ist der Cubikinhalt einer solchen Pyramide offenbar $= \frac{mh}{3}$. Der Cubikinhalt von n solchen Pyramiden ist also $\frac{nmh}{3} = \frac{nm \times h}{3}$.

Da nun nm = g, so ist $\frac{nm \times h}{3} = \frac{gh}{3}$ oder dem dritten Theile der Grundfläche der ganzen Pyramide multiplizirt mit ihrer Höhe. Es ist also überhaupt jede Pyramide der dritte Theil ihrer Grundfläche multiplizirt mit ihrer Höhe.

§. 304.

Aufgabe. (Fig. 125) Aus den gegebenen beiden Grundflächen abcd = b, efgh = d, und ihrer Entfernung nm = g den körperlichen Inhalt einer abgestutzten Pyramide zu finden.

Auflösung.

1) Man setze die Höhe km der ganzen Pyramide = a, und die Höhe kn der obern kleinen abgeschnittenen Pyramide = u, so ist:

2) $b : d = a^2 : u^2$ (§. 318.)

$\sqrt{b} : \sqrt{d} = a : u$

3) $u = a \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{b}}$

4) Nun ist die abgestutzte Pyramide $= \frac{1}{3} ab - \frac{1}{3} ud$, also $= \frac{1}{3} ab - \frac{1}{3} a \frac{d\sqrt{d}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{3} a \frac{b\sqrt{b} - d\sqrt{d}}{\sqrt{b}}$

5) Ferner ist $a = u + g = g + a \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{b}}$

$a - a \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{b}} = g$

$a \frac{\sqrt{b} - \sqrt{d}}{\sqrt{b}} = g,$

6) $a = g \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{d}}$

7) Setzt man statt a diesen Werth in die Gleichung Nro. 4, so wird die abgestutzte Pyramide

$= \frac{1}{3} g \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{d}} \times \frac{b\sqrt{b} - d\sqrt{d}}{\sqrt{b}}$

$= \frac{1}{3} g \frac{b\sqrt{b} - d\sqrt{d}}{\sqrt{b} - \sqrt{d}}$

8) Letztere Gleichung enthält zwar schon die gesuchte Auflösung; allein sie hat eine für die Anwendung unbequeme Form. Man multiplizire daher von dem Bruche sowohl den Zähler als den Nenner mit $\sqrt{b} + \sqrt{d}$, so wird der Zähler: $(b\sqrt{b} - d\sqrt{d})$ $(\sqrt{b} + \sqrt{d}) = (b + d)(b - d) + (b - d)\sqrt{bd}$

Eben so wird der Nenner:

$(\sqrt{b} - \sqrt{d})(\sqrt{b} + \sqrt{d} = b - d$

Setzt man nun diese Werthe in die Gleichung Nro 7, so ist die abgestutzte Pyramide

$= \frac{1}{3} g \frac{(b + d)(b - d) + (b - d)\sqrt{bd}}{b - d}$

$= \frac{1}{3} g (b + d + \sqrt{bd})$

§. 385.

Ein Kegel (conus, daher konisch, kegelförmig) ist ein Körper, der von einem Kreise als Grundfläche, und einer einfach gekrümmten Seitenfläche eingeschlossen ist, die in einen einzigen Punkt ausläuft, der die Spitze des Kegels heißt, und von welchem sich nach jedem Punkte der Peripherie der Grundfläche eine gerade Linie ziehen läßt, die ganz in die gekrümmte Fläche fällt.

Höhe, Axe, senkrechter d. i. geradstehender, schiefer Kegel. Sieh §. 358.

Durchschneidet man den Kegel mit einer durch die Axe gelegten Ebene, so ist der Durchschnitt ein Dreieck. Die Schenkel dieses Dreiecks heißen **Seiten** des Kegels. Beim geradestehenden Kegel entsteht durch den erwähnten Schnitt ein gleichschenkeliges, beim schiefen, (wenn der Schnitt nicht rechtwinkelig auf die Neigungslinie gemacht ist,) ein ungleichschenkeliges Dreieck; daher heißt der geradestehende Kegel auch der gleichseitige, der schiefe aber der ungleichseitige.

Die Kegel werden auch eingetheilt: in rechtwinkelige, stumpf- und spitzwinkelige, je nachdem die Seiten derselben einen rechten, stumpfen oder spitze Winkel einschließen.

Die Entstehung des geradestehenden Kegels kann man durch Umdrehung eines rechtwinkeligen Dreieckes um einen seiner Katheten erklären.

*Das Netz zu einem geradestehenden Kegel sieht man Fig. 127 gezeichnet.

§. 386.

Da man sich den Kegel als eine unendlichseitige Pyramide denken kann, so wird der Kubikinhalt desselben auf dieselbe Weise gefunden wie jener der Pyramide, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt, und das Produkt durch drei dividirt.

§. 387.

Aufgabe. Den Cubikinhalt eines abgestutzten Kegels zu finden, wenn der Halbmesser

der Grundfläche $=$ R, der Halbmesser der Abstutzungsfläche $=$ r, und der Abstand beider Flächen $=$ c gegeben ist.

Auflösung. Da man sich den abgestutzten Kegel als eine abgestutzte unendlichseitige Pyramide denken kann, so gilt auch hier die in §. 384 für den körperlichen Inhalt der abgestutzten Pyramide entwickelte Formel.

Da nun die abgestutzte Pyramide $= \frac{1}{3}g(b+d+\sqrt{bd})$, und in dieser Formel g den Abstand der Abstutzungsfläche bezeichnet, so können wir setzen $g = c$, $b = \pi R^2$, $d = \pi r^2$. Substituirt man diese Werthe in obiger Formel, so ist der abgestutzte Kegel

$$= \frac{1}{3} c (\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi^2 r^2 R^2})$$
$$= \frac{1}{3} c (\pi R^2 + \pi r^2 + \pi r R)$$
$$= \frac{1}{3} \pi c (R^2 + r R + r^2)$$

§. 388.

Die gekrümmte Oberfläche eines geradestehenden Kegels ist $= \frac{ps}{2}$, wenn p die Peripherie der Grundfläche und s die Seite des Kegels bedeutet.

Beweis. Man denke sich die Peripherie der Grundfläche in unendlich viele etwa n kleine jedoch gleiche Theile getheilt, und auf alle diese Theilungspunkte gerade Linien von der Spitze des Kegels gezogen, so wird dadurch die gekrümmte Oberfläche des Kegels in n Dreiecke getheilt, deren Grundlinien die unendlich kleinen Theile der Peripherie, und deren Höhe bei den unendlich kleinen Grundlinien die Seite des Kegels ist. Setzt man nun so eine unendlich kleine Grundlinie $=$ g, so ist der Flächeninhalt eines der genannten Dreiecke $= \frac{gs}{2}$; mithin der Flächeninhalt von der gekrümmten Oberfläche des Kegels oder von n solchen Dreiecken $= \frac{ngs}{2} = \frac{ng \times s}{2}$. Da aber ng offenbar

die Summe aller kleinen Theile ist, in welche die Peripherie der Grundfläche getheilt wurde, also $= p$, so ist die gekrümmte Oberfläche des Kegels $= \frac{ps}{2}$.

Ist von dem Kegel der Halbmesser r der Grundfläche und die Höhe h des Kegels bekannt, so ist die gekrümmte Oberfläche $= \pi r \sqrt{(h^2 + r^2)}$

Denn da man sich den geradestehenden Kegel dadurch entstanden denkt, daß sich ein rechtwinkeliges Dreieck um einen seiner Katheten bewegt, so sind offenbar r und h die beiden Katheten, die Seite s des Kegels aber die Hypothenuse; daher

$$s^2 = h^2 + r^2$$
$$s = \sqrt{(h^2 + r^2)}$$

Die Peripherie der Grundfläche aber ist $= 2\pi r$; mithin die gekrümmte Oberfläche $= \frac{2\pi r \times \sqrt{(h^2 + r^2)}}{2}$ $= \pi r \sqrt{(h^2 + r^2)}$

§. 389.

Die gekrümmte Oberfläche eines abgestutzten Kegels ist $= \pi q (R + r)$, wenn q die Seite des abgestutzten Kegels, R den Halbmesser der Grundfläche, und r den Halbmesser der Abstutzungsfläche bedeutet.

Beweis. Die krumme Fläche des abgestutzten Kegels ist offenbar gleich der krummen Fläche des ganzen Kegels weniger der krummen Fläche des fehlenden. Setzt man nun die Seite des Kegels $= S$, die des fehlenden gleich s, so ist die gekrümmte Oberfläche des ganzen Kegels $= \pi RS$, die des fehlenden $= \pi rs$; mithin die gekrümmte Oberfläche des abgestutzten Kegels oder $K = \pi RS - \pi rs = \pi (RS - rs)$

Nun verhält sich

$$S : s = R : r$$

folglich*) $(S - s) : (R - r) = S : R.$

Also $R(S - s) = RS - rS$

Mithin $RS = R(S - s) + rS$

Setzt man diesen Ausdruck für RS in die Gleichung

$K = \pi (RS - rs)$,

so erhält man:

$$K = \pi [R(S - s) + rS - rs]$$
$$= \pi [R(S - s) + r(S - s)$$
$$= \pi (R + r) \times S - s$$

Da nun $S - s$ offenbar $= q$ ist, so ist

$$K = \pi q (R + r)$$

§. 390.

Die krumme Oberfläche K des abgestutzten geradestehenden Kegels (Fig. 128) ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie der Peripherie p des in der Mitte zwischen beiden Flächen liegenden Kreises fg, und dessen Höhe der Seitenlinie bc die wir q nennen wollen, gleich ist; also $K = pq$

Beweis. Man lasse den Buchstaben q, R und r die Bedeutungen, welche sie im vorigen Paragraphe hatten, und nehme daraus auch den Inhalt des abgestutzten Kegels. So ist:

$$K = \pi q (R + r) = \pi (R + r) q$$
$$= 2\pi \left(\frac{R + r}{2}\right) q$$

Wenn nun fg mitten zwischen bc und ed liegt, so sind die Perpendikel ey und fh einander gleich; folglich ist auch $bh = fy$

Nun ist $bh = bk - hk = R - mf$ (§. 291.)

und $fy = mf - my = mf - r$

folglich $R - mf = mf - r$

*) Versetzt man nämlich in obiger Proportion die innern Glieder, so ist $S : R = s : r$; mithin auch $(S - s) : (R - r) = S : R$. Die Summe oder Differenz der Vorderglieder verhält sich nämlich zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede. (§. 202.)

Also $2mf = R + r; mf = \frac{R + r}{2}$

Also die Peripherie p des Kreises, dessen Halbmesser mf ist $= \frac{2\pi(R + r)}{2}$.

Setzt man nun in der obigen Gleichung: $K = \frac{2\pi(R + r)}{2} q$ statt $\frac{2\pi(R + r)}{2}$ den eben gefundenen Werth p, so ist

$K = pq$

§. 391.

Eine Kugel ist ein Körper, der von einer einzigen krummen Fläche begränzt wird, die von einem bestimmten innerhalb des Körpers liegenden Punkte, den man Centrum oder Mittelpunkt nennt, durchgehends gleichweit absteht.

Eine gerade Linie, welche von dem Mittelpunkte nach irgend einem Punkte der Oberfläche gezogen wird, nennt man einen Halbmesser, Radius; eine gerade Linie, welche von irgend einem Punkte der Oberfläche durch den Mittelpunkt nach einem andern Punkte der Oberfläche gezogen wird, nennt man eine Axe, einen Durchmesser oder Diameter; die Endepunkte der Axe nennt man Pole. Ein Körper, welcher von einem Theile der Kugeloberfläche und einer Kreisfläche vollkommen begränzt wird, und dadurch entsteht, daß man einen Theil der Kugel durch eine ebene Fläche abschneidet, heißt ein Kugelabschnitt Ein Körper, welcher einen Theil der Kugeloberfläche zur Grundfläche, und seine Spitze im Mittelpunkte der Kugel hat, heißt ein Kugelausschnitt. Ein Theil der Kugeloberfläche, welcher zwischen zwei gleichlaufenden Kreislinien liegt, heißt ein Kugelband oder eine Zone.

Man kann sich eine Kugel dadurch entstanden denken, daß sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser herum bewegt.

Alle Halbmesser sowie alle Durchmesser einer Kugel sind einander gleich.

*Das Netz zu einer Kugel findet man in Fig. 129.

§. 392.

Wenn eine Kugel irgendwo mit einer Ebene durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt eine Kreisfläche. (Fig. 131)

Beweis. Es sey ab ein ebener Durchschnitt der Kugel. Aus dem Mittelpunkte c der Kugel ziehe man einen Perpendikel cd auf die Ebene des Durchschnitts, aus d ziehe man nach beliebigen Punkten der Peripherie des Durchschnitts die Linien da, de, db, und aus c die Halbmesser ca, ce, cb, so sind alle diese Dreiecke cda, cde, cdb congruent, weil die Hypothenuse ein Kathet, und der der Hypothenuse gegenüberliegende Winkel in dem einen genau so sind wie in dem andern, folglich da = de = db, also alle Punkte der Peripherie des Durchschnittes von dem Punkte d gleichweit entfernt, mithin der Durchschnitt eine Kreisfläche.

Ein Perpendikel, aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene eines Durchschnitts gefällt, trifft also den Mittelpunkt des letzteren, sowie umgekehrt eine gerade Linie, aus dem Mittelpunkte der Kugel nach dem Mittelpunkte eines Durchschnitts gezogen, ein Perpendikel auf letzteren ist.

§. 393.

Die ebenen Durchschnitte einer Kugel sind näher am Mittelpunkte größer als weiter von demselben. (Fig. 131)

Also: $xq > zy$

Beweis. Es sey cn senkrecht auf die beiden parallelen Durchschnitte, also ein Perpendikel auf die Mittelpunkte beider. Da ist nun $cq^2 = mq^2 + cm^2$, $cy^2 = ny^2 + cn^2$.

Da nun $cn^2 > cm^2$, so kann ny^2 nicht gleich und nicht größer seyn als mq^2, weil in beiden Fällen $ny^2 + cn^2$ größer wären als $mq^2 + cm^2$, ny^2 muß folglich klei-

ner seyn als mq^2; mithin auch $ny < mq$; folglich auch der Durchschnitt zy kleiner als der Durchschnitt xq, weil ersterer einen kleineren Radius hat als letzterer.

Durchschnitte einer Kugel, die gleich weit vom Mittelpunkte der Kugel entfernt sind, sind einander gleich. Geht der Durchschnitt durch den Mittelpunkt der Kugel, so ist er am größten. Daher heißen Kreise auf einer Kugel, deren Mittelpunkte im Mittelpunkte der Kugel liegen, auch größte Kreise.

Die Ebene eines jeden größten Kreises halbirt die Kugel.

Je zwey größte Kreise einer Kugel halbiren einander.

§. 394.

Die Oberfläche einer Kugel ist $= \pi D^2$, wenn D den Durchmesser der Kugel bezeichnet. (Fig. 130)

Beweis. Man denke sich die ganze Kugel in unendlich viele, sehr kleine Scheiben zerschnitten, deren gebogene Oberflächen wegen ihrer kleinen Höhe als einfach gekrümmte Flächen betrachtet werden können. Nimmt man nun Deutlichkeit halber den Theil amnb als eine solche Scheibe an, so wird die Linie cd, wenn sie sich um die Axe qo, auf welcher sie perpendikulär steht, dreht, mit mn, eine Fläche beschreiben, welche der gekrümmten Oberfläche eines abgestutzten Kegels gleich ist, von dem bn der Halbmesser der Grundfläche, am der Halbmesser der Abstutzungsfläche, mn die Seite ist. Nimmt man nun an, daß c der Mittelpunkt der Linie ab sey, so erhält man die eben erwähnte gekrümmte Oberfläche des abgestutzten Kegels, wenn man die mit dem Radius cd gerissene Peripherie mit der Seite mn des Kegels multiplizirt. Mithin die gekrümmte Fläche $2\pi \times cd \times mn$ (§. 390) Dreht sich nun ferner cs mit tn um die Axe qo, so beschreiben diese ebenfalls eine Fläche, welche der gekrümmten Oberfläche eines Cylinders gleich kommt, dessen Halbmesser $=$ cs und dessen Höhe tn, so daß die gekrümmte Fläche gleich wäre der mit dem Radius

cs gerissenen Kreislinie $\times$ tn, also $= 2\pi \times cs \times tn$. Da nun wie sogleich bewiesen werden soll, $cd \times mn = cs \times tn$, so ist $2\pi \times cd \times mn = 2\pi \times cs \times tn$, also die beiden Flächen einander vollkommen gleich. Um zu beweisen, daß $cd \times mn = cs \times tn$ sey, ziehe man den Halbmesser do, und den Perpendikel mr, so erhält man zwei rechtwinkelige Dreiecke mnr und doc; welche einander ähnlich sind, weil beide bei c und r rechte Winkel haben, und der Winkel bei o den Bogen qd der Winkel bei $n = x$ aber als ein Peripheriewinkel den halben Bogen uqd, d. i. ebenfalls qd zum Maße hat, daher auch der dritte Winkel des einen Dreiecks gleich dem dritten des andern ist.

Es verhält sich also:

$mn : mr = do : dc$

Setzt man anstatt mr die gleiche tn, und anstatt do die gleiche cs, so ist:

$mn : tn = cs : dc$ und

also $mn \times dc = tn \times cs$

Es ist aber cs gleich dem Halbmesser op der größten Kreisfläche, und $tn = ab$ ein Stück des Durchmessers, folglich $2\pi \times cs \times tn = 2\pi \times op \times ab$. Da nun $2\pi \times cs \times tn$ auch $= 2\pi \times cd \times mn$, so ist auch $2\pi \times cd \times mn$, oder die Kugelzone, welche zwischen den durch m und n gehenden Parallelkreisen liegt, $= 2\pi \times op \times ab$, d. i. jede Kugelzone ist gleich dem Produkte, welches entsteht, wenn man den größten Umkreis mit dem mit der Zone übereinstimmenden Stücke des Durchmessers multiplizirt. Da nun dieses von allen Theilen der Kugel gesagt werden kann, so ergibt sich, daß die Oberfläche der Kugel gleich sey dem Produkte welches entsteht, wenn man den Durchmesser mit dem größten Kreise multiplizirt; also $= \pi D^2$.

Die Oberflächen der Kugeln verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser.

Die gekrümmte Oberfläche eines Kugelabschnittes (Fig. 131) wird gefunden, wenn man seine Höhe du mit πD multiplizirt, wo wieder D den Diameter der Kugel bezeichnet.

§. 395.

Der Cubikinhalt einer Kugel ist $= \frac{\pi D^3}{6}$, wenn D den Durchmesser der Kugel bezeichnet.

Beweis. Man kann sich die Kugel als regelmäßiges Körpervieleck, Polyeder, denken, das aus unendlich vielen etwa n kleinen Pyramiden besteht, deren unendlich kleine Grundflächen lauter gleiche Theile der Kugeloberfläche sind, und deren Spitzen sämmtlich im Mittelpunkte der Kugel zusammenlaufen. Es wird demnach die Höhe einer jeden der genannten Pyramiden der Radius der Kugel oder $\frac{D}{2}$ seyn. Setzt man nun die unendlich kleine Grundfläche einer solchen Pyramide $= g$, so ist der kubische Inhalt eine Pyramide offenbar $= \frac{Dg}{6}$; folglich der Cubikinhalt von n solchen Pyramiden $= \frac{ngD.}{6}$ Da aber ng offenbar die Kugeloberfläche oder πD^2 ist.

$$\text{so ist } \frac{ngD}{6} = \frac{\pi D^2 \times D}{6} = \frac{\pi D^3}{6}.$$

Kugeln verhalten sich daher zu einander, wie die Kubusse ihrer Durchmesser oder Radien. Umgekehrt verhalten sich die Halb- oder Durchmesser der Kugeln wie die Cubikwurzeln aus dem Inhalte der Kugeln.

Der Kubikinhalt eines Kugelausschnittes wird gefunden wenn man die Oberfläche des entsprechenden Kugelabschnittes mit dem dritten Theile des Kugelhalbmessers multiplizirt.

Der Beweis dafür wird auf ähnliche Art geführt, wie jener für die Berechnung des Cubikinhalts der ganzen Kugel.

Der Cubikinhalt des Kugelabschnittes wird gefunden, wenn man vom Kugelausschnitte den fehlenden Kegel subtrahirt.

In derselben Buchhandlung sind erschienen:

Funke, G. F., neueste Jugendbibliothek. Eine Sammlung moralischer Erzählungen, Reisebeschreibungen, Biographieen, Gedichte ꝛc. für des jugendliche Alter. 8 Bände. Zweite verb. Aufl. geh. 5 Rthlr. 6 Gr. oder 8 fl. 42 kr.

Kaum sind wenige Monate seit dem Erscheinen der ersten Bände verstrichen, und schon mußte trotz der bedeutenden Auflage eine zweite veranstaltet werden. Da diese Bibliothek nun bereits aus 8 Bänden besteht, nur wahrhaftes Schönes und Gediegenes enthält, da sie seit Jahren mit Fleiß und Liebe verbreitet ward, und es dem Herausgeber gelungen ist, Männer wie Gabriel Eith, Hofrath Gebauer, Pfarrer Müller, Horath Heinrich Rebau, H. Tegner und Senior Walther zur Theilnahme zu gewinnen, und andere hochgeachtete Jugendschriftsteller dieselbe versprochen haben, so darf er wohl hoffen, ein Werk zu liefern, das neben der Bibel und dem Gesangbuche als Haus- und Familienbuch zu betrachten ist, und Kindern, Eltern und Lehrern zum Lesen, Vorlesen und Nacherzählen dienen wird.

Wernhard, J., kurzer und doch sehr faßlicher Katechismus der Geschichte von Bayern in 8 Zeiträume. Besonders für Schulen. Mit einer Stammtafel des k. Hauses. 8. 1832. 8. gr. oder 36 kr.

— — kurzer und doch sehr faßlicher Katechismus der Naturgeschichte oder Naturbeschreibung, zum Schul- und Privat-Unterricht. 8. 1832. 8. oder 36 kr.

— — erstes Maiblümchen für die vaterländische Jugend, oder kurzer und doch deutlicher Unterricht in der bayerischen Constitution. Mit Kupfer. 12. 1832. geh. 8 gr. oder 30 kr.

— — kurzer und doch sehr faßlicher Katechismus aus der Geographie oder Erdebeschreibung, mit besonderer Rücksicht auf Bayern. 8. 1833.

Haben die bisherigen Schriften des Verfassers den ungetheiltesten Beifall gefunden, so darf man sich überzeugt halten, daß auch diese dieselben rühmlichen Eigenschaften besitzen, die jene auszeichnen. Die gedrängte, und dabei doch so faßliche Darstellung empfiehlt sie hauptsächlich zur Einführung in Schulen, doch leisten sie nicht weniger gute Dienste bei dem Privat-Unterricht. Bei Abnahme von größern Parthieen werden bedeutend billigere Preise gemacht.

Druckfehler, welche noch vor Vollendung des Druckes entdeckt wurden.

Seite 16. Z. 10 v. O. statt viel l. viele.
" 36. " 10 " O. " $\frac{1}{6}$ fl. von $\frac{1}{5}$ fl. l. $\frac{1}{6}$ von $\frac{1}{5}$ fl.
" 99. §. 160 Z. 5. " $3ab^2 \times 2a^2cd$ l. $3ab^2 + 2a^2cd$
" 182. Z. 5. v. O. " (Doublon), = 8 l. (Doublon) = 80.
" 199. " 10. v. U. " reisse man aus l. reisse aus.
" 211. " 14. v. O. " stecke in l. stecke (Fig. 49) in.
" 213. " 1. v. U. " q, m und n l. q, u und n.
" 214. " 4. v. O. " ox l. qx.
" 214. " 9. v. O. " qm l. qu.
" 216. " 3. v. U. " wagrecht l. wagerecht.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bräuhäuser, Joseph

Theoretisch-praktisches Lehrbuch der Arithmetik und Geometrie für Gewerbeschulen

Augsburg 1833

Math.p. 53 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081502-0